www.NoavaranGermi.ir

ارتعاشات پیشا و کاربرد آن در مهندسی زلزله

در نرم افزار های

MatLab و SeismoSignal

جلسه هفتم: طیف پاسخ و
روش های حل معادله حرکت

محمد حسین بهشتی خواه
beheshtikhah@gmail.com

تابستان ۱۳۹۱

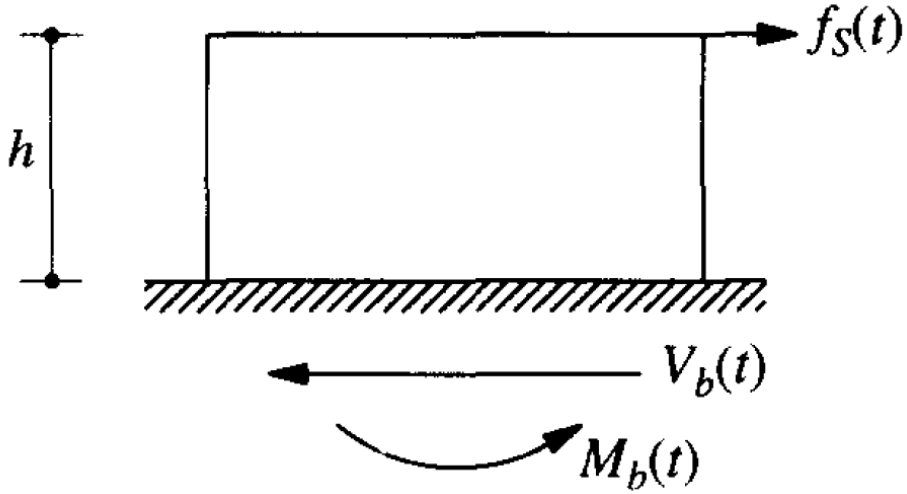
مقدمه

- به طور عام، منظور از طیف (spectrum) یک پارامتر، یک محدوده کامل (complete range) از آن پارامتر است.
- در علم مهندسی زلزله به نمودار مکان هندسی پاسخ حداکثر یک سازه یک درجه آزاد نسبت به فرکانس (پریود) آن سازه با میرایی ثابت تحت یک شتابنگاشت خاص، طیف پاسخ سازه تحت آن شتابنگاشت خاص می گویند.
- اگر رفتار سازه الاستیک خطی فرض شود، طیف پاسخِ الاستیک و اگر الاستوپلاستیک فرض شود طیف پاسخِ غیر الاستیک به دست می آید.
- طیف پاسخ پلی بین علم دینامیک سازه ها و طراحی سازه هاست و پایه نظری برای تعیین نیروهای جانبی در آیین نامه های زلزله را تشکیل می دهد.
- در رسم طیف پاسخ فرض بر این است که حداکثر تغییر شکل در وقوع زمین لرزه اتفاق می افتد.

طیف پاسخ

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- طیف پاسخ از تحلیل تاریخچه زمانی سازه یک درجه آزاد به دست می آید.
- در تحلیل تاریخچه زمانی تمامی پاسخ های سازه را می توان برحسب پاسخ جابه جایی سازه بیان کرد.
- بنابراین طیف پاسخ جابه جایی سازه برای محاسبه تمامی پاسخ های آن کافی است.
- از آنجایی که پارامتر A واحد شتاب دارد ولی شتاب نیست به آن شبه شتاب می گویند.



$$f_S(t) = ku(t)$$

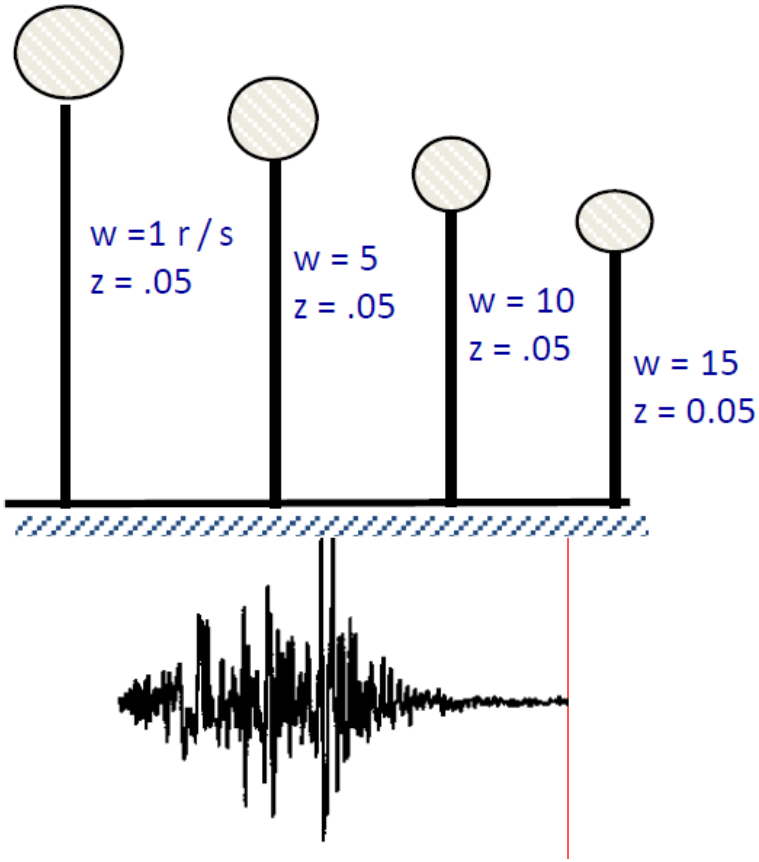
$$= m\,\omega_n^2\,u(t) = mA(t)$$

$$V_b(t) = f_S(t) \qquad M_b(t) = hf_S(t)$$

طیف پاسخ

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- بنابراین برای محاسبه نیروی وارد به سازه نباید پاسخ شتاب را محاسبه کرد بلکه باید پاسخ شبه شتاب را محاسبه کرد که این موضوع نه به دلیل راحتی محاسبات بلکه به دلیل کاربرد آن در محاسبه دقیق نیروها است.
- در حالت کلی می توان گفت:

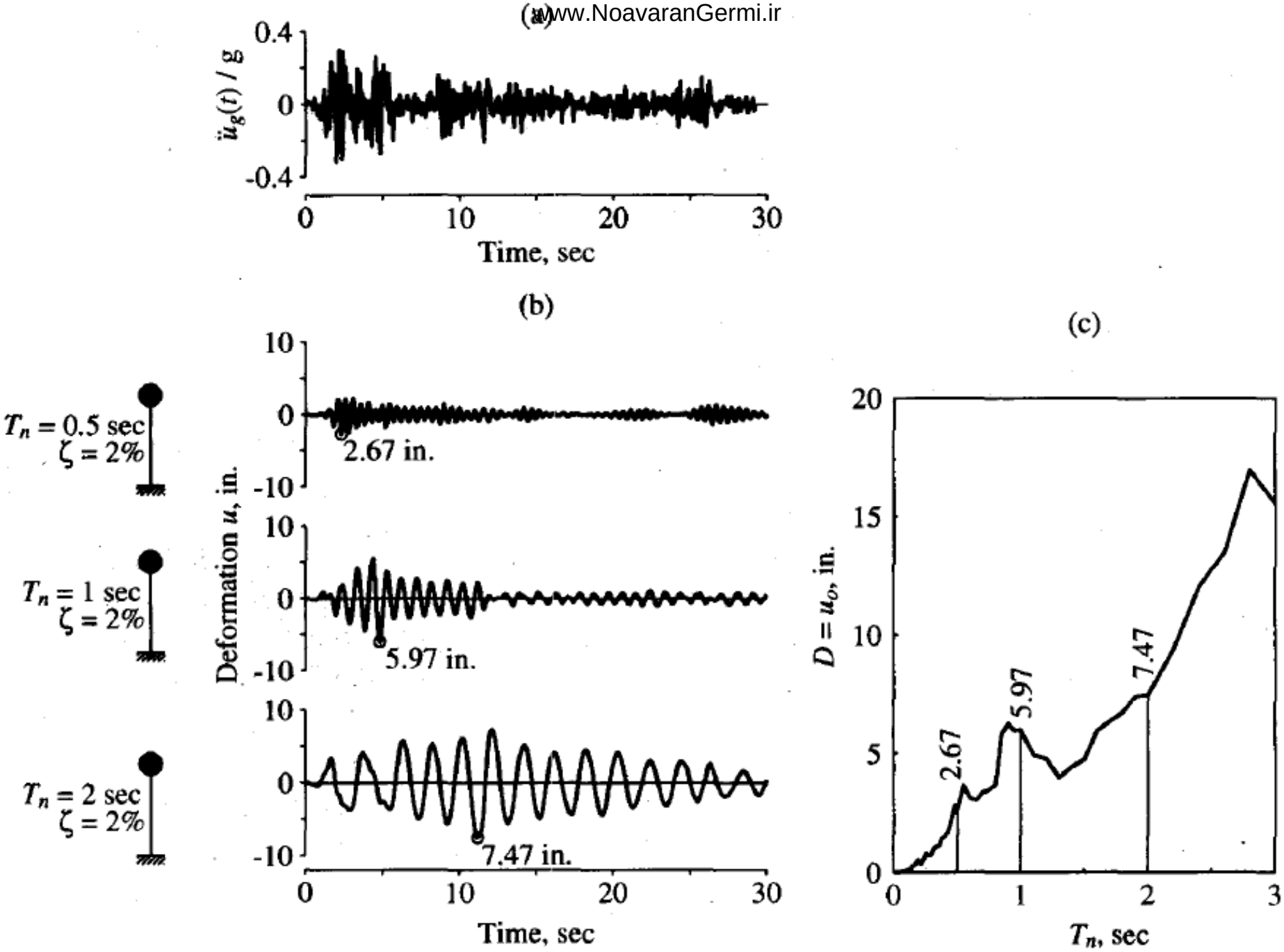


$$u_o(T_n, \zeta) \equiv \max_t |u(t, T_n, \zeta)|$$

$$\dot{u}_o(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\dot{u}(t, T_n, \zeta)|$$

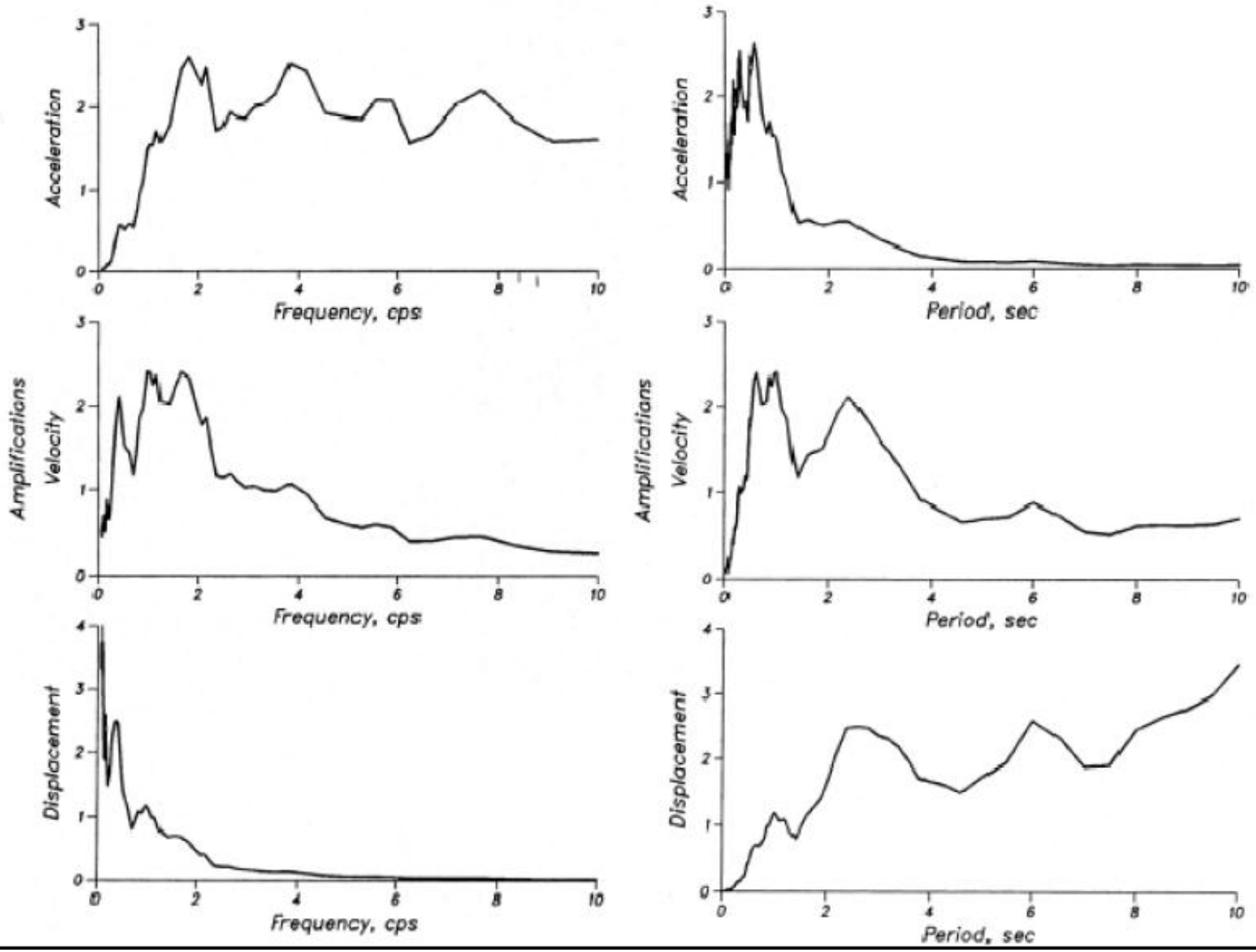
$$\ddot{u}^t_o(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\ddot{u}^t(t, T_n, \zeta)|$$

www.NoavaranGermi.ir

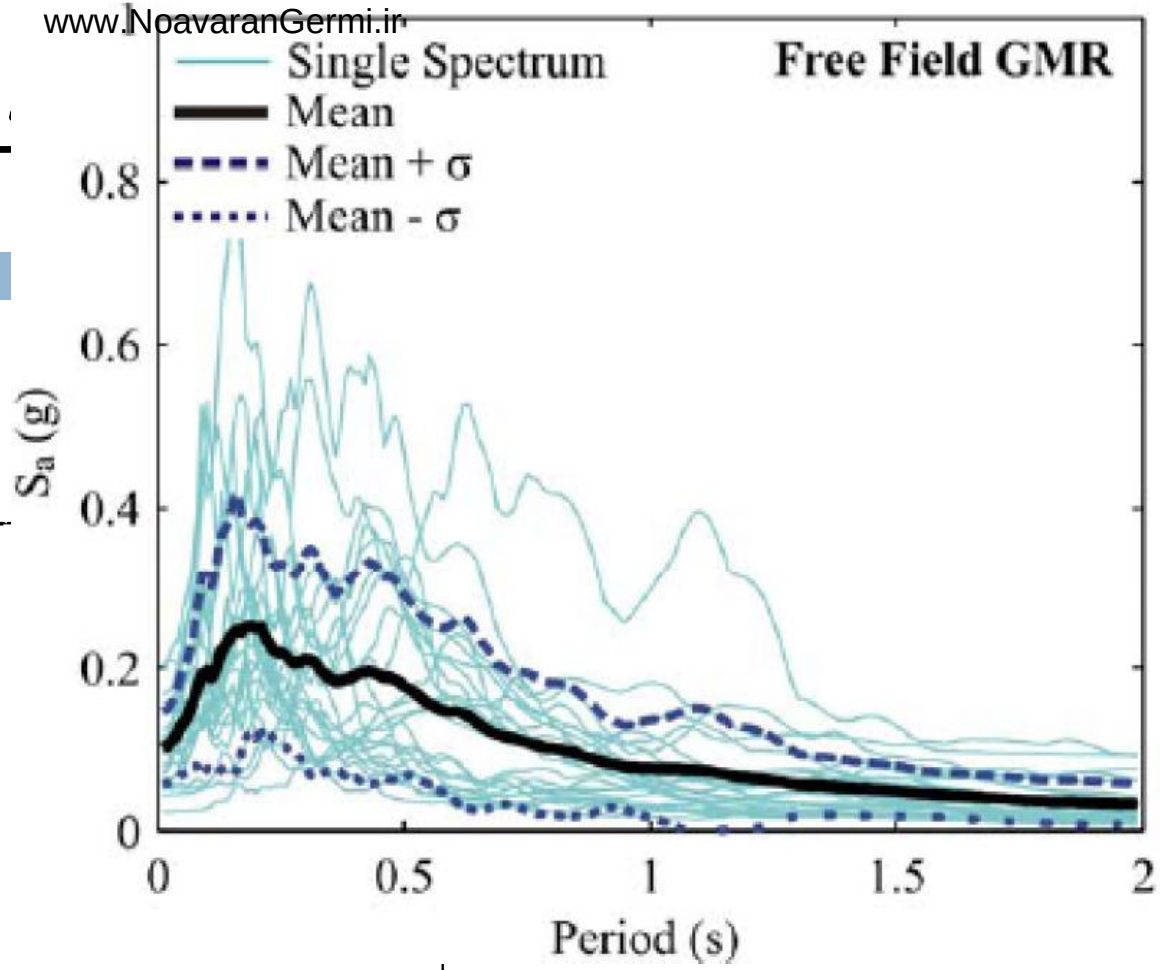


www.NoavaranGermi.ir

شکل کلی طیف پاسخ



www.NoavaranGermi.ir



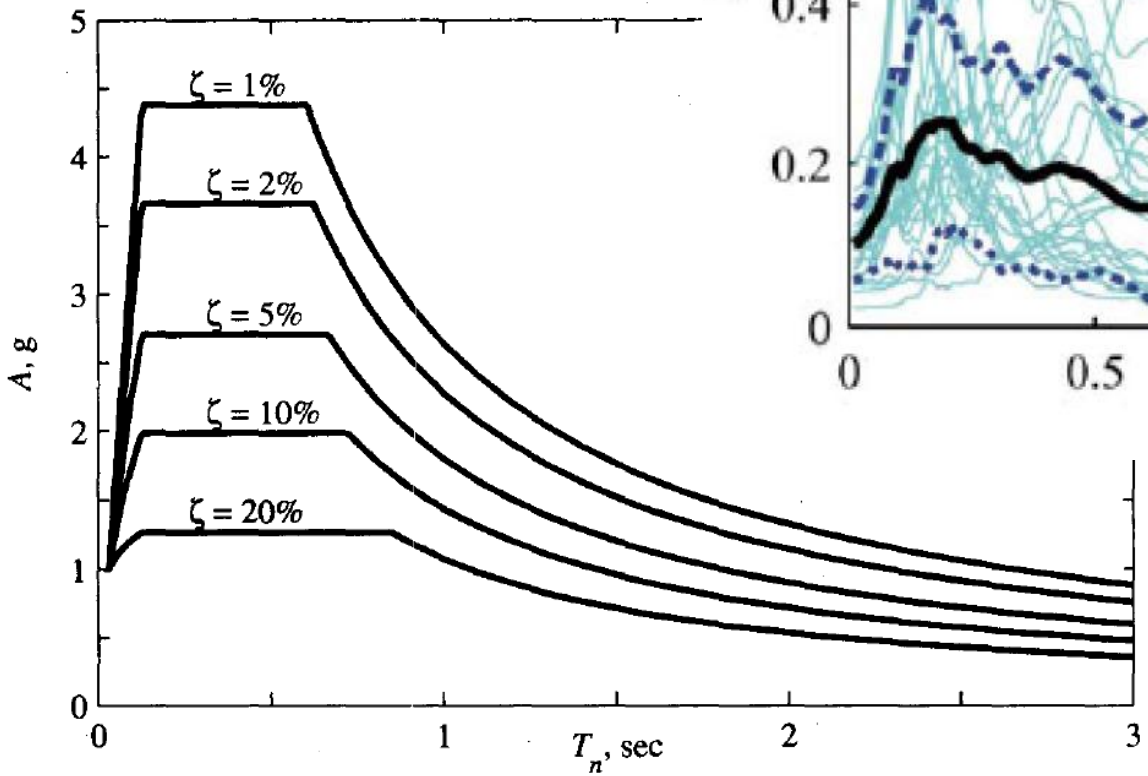


Figure 6.9.9 Pseudo–acceleration design spectrum (84.1th percentile) for ground motions with $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ in./sec, and $u_{go} = 36$ in.; $\zeta = 1, 2, 5, 10$, and 20%.

رابطه طیف پاسخ شتاب و شبه شتاب

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

$$\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n \dot{u}(t)$$

$$\zeta = 0 \Rightarrow \ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t)$$

$$\ddot{u}_o^t = \omega_n^2 u_o = \omega_n^2 D = A$$

- بنابراین در صورتی که میرایی صفر باشد پاسخ شتاب و شبه شتاب یکسان است.
- با افزایش میرایی اختلاف آن ها زیاد می شود.

طیف پاسخ چهارجانبه (ترکیبی)

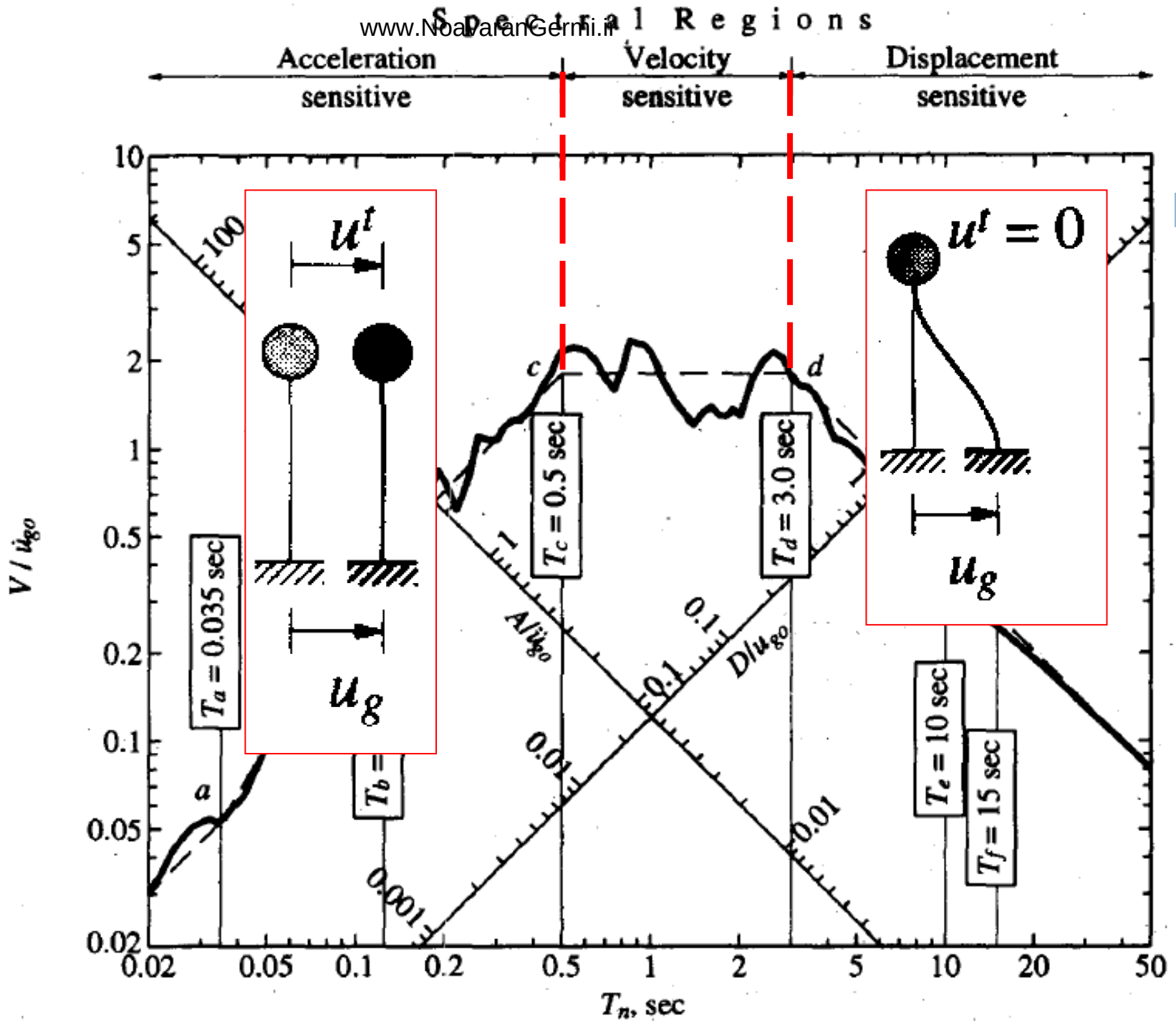
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- از آنجایی که پاسخ تغییرمکان، شبه سرعت و شبه شتاب با یکدیگر رابطه جبری دارند می توان آن ها را روی یک نمودار نشان داد. لازمه انجام این کار لگاریتمی بودن هر چهار محور این نمودار است. به همین دلیل به آن طیف چهارجانبه می گویند.

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D$$

- لازم به ذکر است که طیف های پاسخ تغییر مکان، سرعت و شتاب را نمی توان در یک نمودار واحد رسم کرد، زیرا با هم رابطه جبری ندارند.
- کاربرد این طیف ها فقط در تحلیل تاریخچه زمانی سازه هاست. در تحلیل طیفی سازه ها از طیف پاسخ واقعی استفاده می شود.

www.NoavaranGermi.ir



www.NoavaranGermi.ir

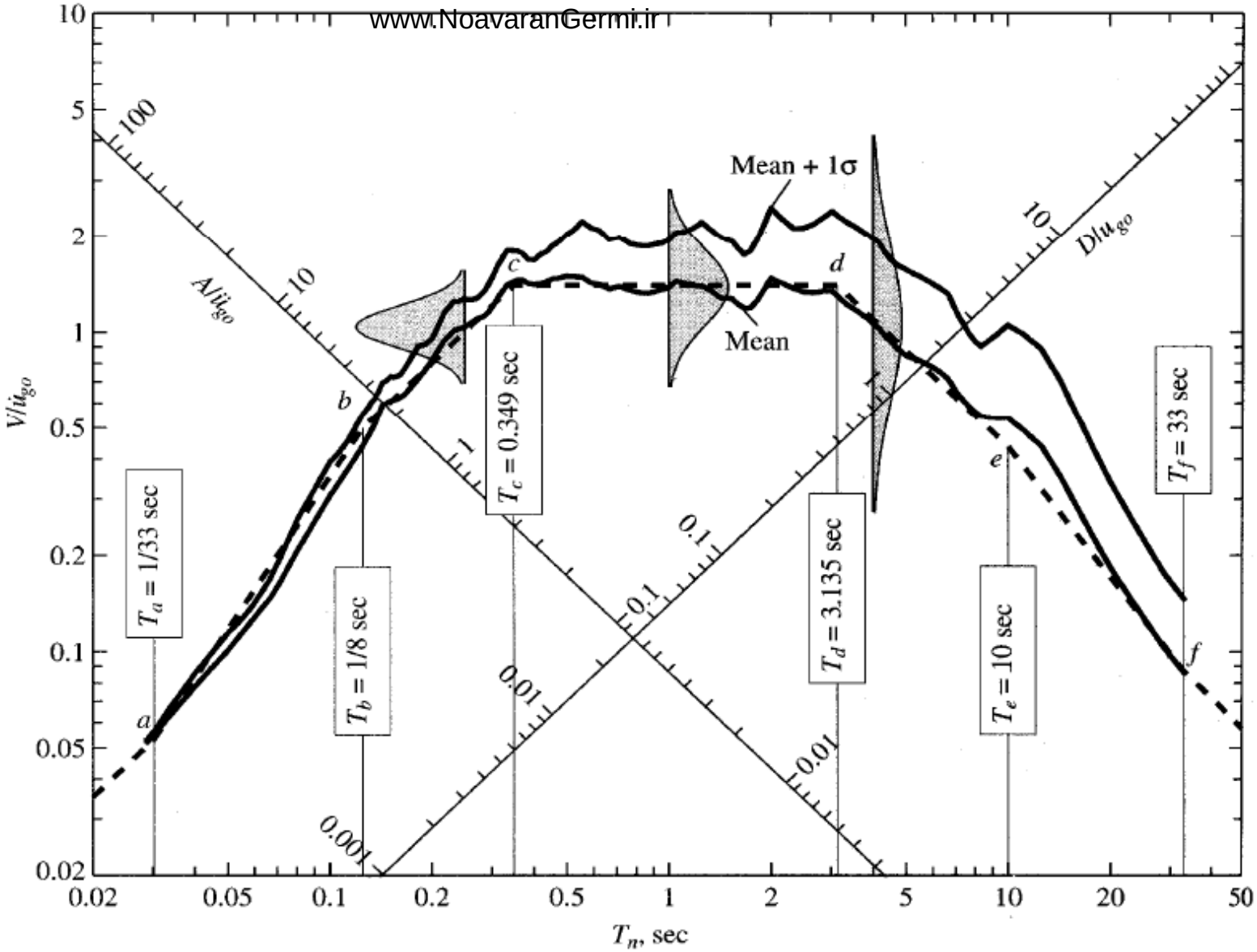


Figure 6.9.2 Mean and mean $+1\sigma$ spectra with probability distributions for V at $T_n = 0.25$, 1, and 4 sec; $\zeta = 5\%$. Dashed lines show an idealized design spectrum. (Based on numerical data from R. Riddell and N. M. Newmark, 1979.)

جمع بندی

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- ملاحظه شد که طیف های پاسخ تا چه حد در مهندسی زلزله مفید هستند. به همین دلیل بعد از ثبت شتابنگاشت هر زلزله قوی طیف های پاسخ آن بلافاصله رسم و منتشر می شود.
- مراحل ساخت طیف پاسخ:

۱- تعریف شتاب زمین (محرک ورودی)

۲- محاسبه پاسخ تغییر شکلی سیستم از تحلیل خطی تاریخچه زمانی با یکی از روش های عددی

۳- محاسبه مقدار حداکثر پاسخ تغییر شکل

۴- تکرار گام ۲ و ۳ برای فرکانس های مختلف فرکانس (پریود) سازه

- در ادامه چند روش عددی مهم مورد بررسی قرار می گیرد.

روش تفاضل مرکزی
Central Difference

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- این روش عددی یک روش صریح است، چون در آن معادله دیفرانسیل مستقل از مشتقات بالا حل می شود.
- این روش عددی در نرم افزار FLAC مورد استفاده قرار گرفته است. به همین دلیل نرم افزار FLAC توانایی حل مدل های عددی را با کمترین میزان RAM دارد.
- در این روش، سرعت و شتاب به صورت تفاضل محدود (مشتق گیری عددی از تابع تغییر مکان نسبت به زمان) نوشته می شود.

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

- با جایگذاری در معادله حرکت

$$m\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} + ku_i = p_i$$

- با حل این معادله مقدار پاسخ جابه جایی u_{i+1} در تمام گام ها قابل محاسبه است. در صورت لزوم مقدار سرعت و شتاب از پاسخ جابه جایی به دست می آید.

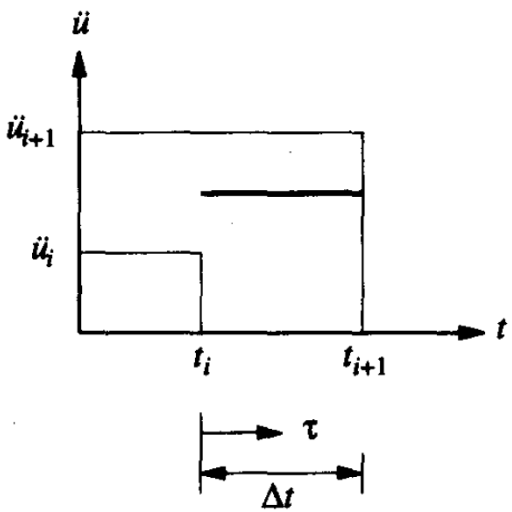
روش نیومارک
Newmark method

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- این روش عددی یک روش ضمنی است، چون در آن معادله دیفرانسیل با توجه به مشتقات بالا حل می شود.
- این روش عددی در نرم افزار PLAXIS مورد استفاده قرار گرفته است.
- الف) روش شتاب متوسط (روش اولر-گاوس با شتاب ثابت):

فرض می شود شتاب در هرگام زمانی برابر شتاب متوسط است. بنابراین مقدار آن در هر گام زمانی برابر است با $\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$

با انتگرالگیری از این رابطه و اعمال شرایط مرزی سرعت به دست می آید. جابه جایی نیز به همین صورت. بنابراین



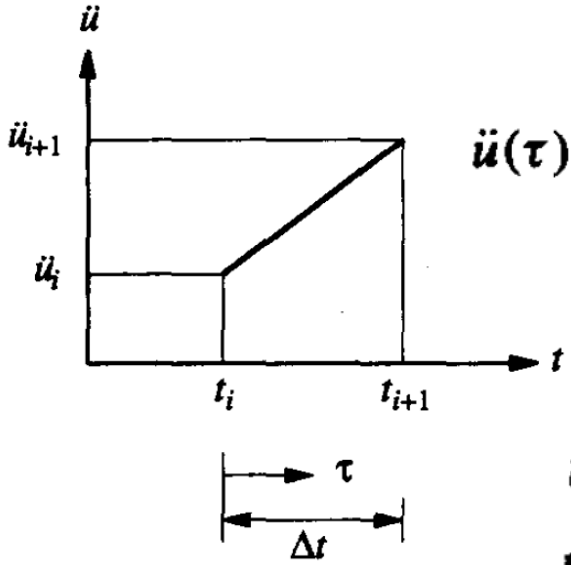
$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

روش نیومارک
Newmark method

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- ب) شتاب خطی (نیومارک-بتا)



شتاب در هرگام به صورت خطی در نظر گرفته می شود. بنابراین مقدار آن در هر گام زمانی برابر است با $\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$

با انتگرالگیری از این رابطه و اعمال شرایط مرزی سرعت به دست می آید. جابه جایی نیز به همین صورت. بنابراین

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3}\ddot{u}_i\right)$$

شکل کلی تر مربوط به روابط الف و ب به صورت زیر است:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\,\Delta t]\,\ddot{u}_i + (\gamma\,\Delta t)\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_{i+1}$$

روش نیومارک
Newmark method

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- که در آن

شتاب خطی $\gamma = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{4}$

شتاب ثابت $\gamma = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{6}$

- معادله سوم نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m}$$

- با حل این سه معادله سه مجهول پاسخ جابه جایی، سرعت و شتاب در تمام گام ها به صورت coupled قابل محاسبه است.

www.NoavaranGermi.ir

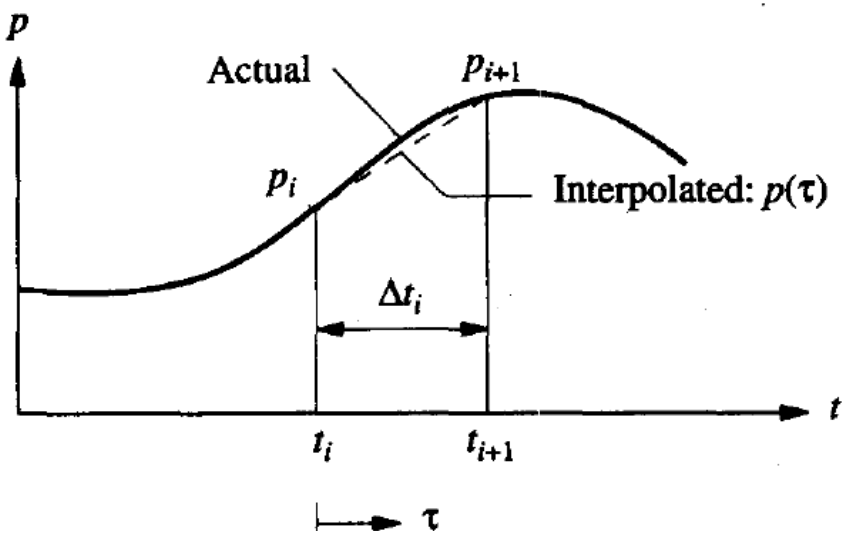
Table 1.1 Comparison of explicit and implicit solution methods

Explicit	Implicit
Timestep must be smaller than a critical value for stability.	Timestep can be arbitrarily large, with unconditionally stable schemes.
Small amount of computational effort per timestep.	Large amount of computational effort per timestep.
No significant numerical damping introduced for dynamic solution.	Numerical damping dependent on timestep present with unconditionally stable schemes.
No iterations necessary to follow nonlinear constitutive law.	Iterative procedure necessary to follow nonlinear constitutive law.
Provided that the timestep criterion is always satisfied, nonlinear laws are always followed in a valid physical way.	Always necessary to demonstrate that the above-mentioned procedure is (a) stable, and (b) follows the physically correct path (for path-sensitive problems).
Matrices are never formed. Memory requirements are always at a minimum. No bandwidth limitations.	Stiffness matrices must be stored. Must find ways to overcome associated problems such as bandwidth. Memory requirements tend to be large.
Since matrices are never formed, large displacements and strains are accommodated without additional computing effort.	Additional computing effort needed to follow large displacements and strains.

روش جنینگز

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- آسانترین، مناسب ترین و دقیق ترین روش عددی محاسبه پاسخ سیستم های خطی است که مبتنی بر حل دقیق معادله دیفرانسیل حرکت با درون یابی خطی محرک ورودی در هر گام زمانی است.



$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

$$m\ddot{u} + ku = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau$$

$$u(\tau) = u_i \cos\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\sin\omega_n\tau + \frac{p_i}{k}(1 - \cos\omega_n\tau) + \frac{\Delta p_i}{k}\left(\frac{\tau}{\Delta t_i} - \frac{\sin\omega_n\tau}{\omega_n\,\Delta t_i}\right)$$

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1}$$

www.NoavaranGermi.ir

TABLE 5.2.1 COEFFICIENTS IN RECURRENCE FORMULAS ($\zeta < 1$)

$$A = e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D \Delta t + \cos\omega_D \Delta t\right)$$

$$B = e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right)$$

$$C = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left[\left(\frac{1-2\zeta^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_D \Delta t - \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t}\right)\cos\omega_D \Delta t\right]\right\}$$

$$D = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{2\zeta^2-1}{\omega_D \Delta t}\sin\omega_D \Delta t + \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t}\cos\omega_D \Delta t\right)\right]$$

$$A' = -e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D \Delta t\right)$$

$$B' = e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\cos\omega_D \Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D \Delta t\right)$$

$$C' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left[\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_D \Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D \Delta t\right]\right\}$$

$$D' = \frac{1}{k\,\Delta t}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D \Delta t + \cos\omega_D \Delta t\right)\right]$$

انتگرال دوهامل

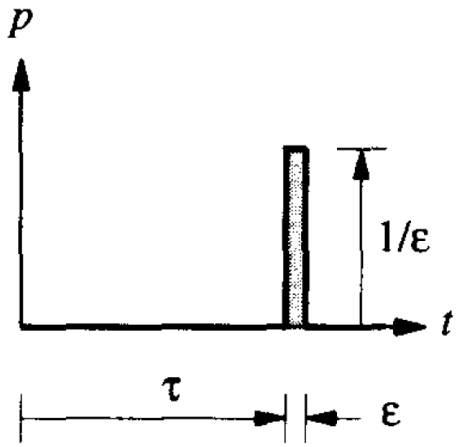
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- در علم مکانیک کلاسیک به انتگرال تابع نیرو نسبت به زمان ضربه می گویند. بنابراین واحد ضربه نیرو-زمان است.
- در صورتی که مقدار این انتگرال واحد باشد به آن ضربه واحد می گویند.
- در مباحث تحریکات ضربه ای از اصطلاح طیف شک به جای طیف پاسخ (بازتاب) استفاده می شود، زیرا بیشینه پاسخ ممکن است در طول اعمال ضربه رخ ندهد.
- اگر $t_d/T_n < \frac{1}{2}$ پاسخ سازه به شکل ضربه بستگی ندارد، بلکه تنها به مقدار ضربه (انتگرال نمودار نیرو نسبت به زمان) بستگی دارد.
- یادآوری: تمامی مطالب این درس محدود به سیستم های خطی است، مگر اینکه به صراحت به غیرخطی بودن آن اشاره شود.
- در علم ریاضیات تابع ضربه واحد را تابع دلتای دیراک (Dirac نام شخص) نشان می دهند.

انتگرال دوهامل

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- می خواهیم پاسخ یک سیستم یک درجه آزاد خطی را به ضربه واحد به دست آوریم.



$$m\ddot{g}(t)+c\dot{g}(t)+kg(t)=\delta(t)$$

$$g(0)=0,\ \dot{g}(0)=0$$

- از آنجایی که سطح زیر نمودار تابع ضربه را می دانیم، از طرفین معادله حرکت انتگرال می گیریم.

$$\int_0^{\varepsilon}(m\ddot{g}+c\dot{g}+kg)dt=\int_0^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}m\ddot{g}(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}m\dot{g}(t)\Big|_0^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}m[\dot{g}(\varepsilon)-\dot{g}(0)]=m\dot{g}(0+)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}c\dot{g}(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}cg(t)\Big|_0^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}c[g(\varepsilon)-g(0)]=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}kg(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}kg(0)t\Big|_0^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}kg(0)\varepsilon=0$$

انتگرال دوهامل

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon} (m\ddot{g} + c\dot{g} + kg)dt = m\dot{g}(0+) = 1$$

- صفر شدن جمله های مربوط به میرایی و سختی بیانگر این است که فنر و میراگر فرصت عکس العمل پیدا نکرده اند. در این صورت معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

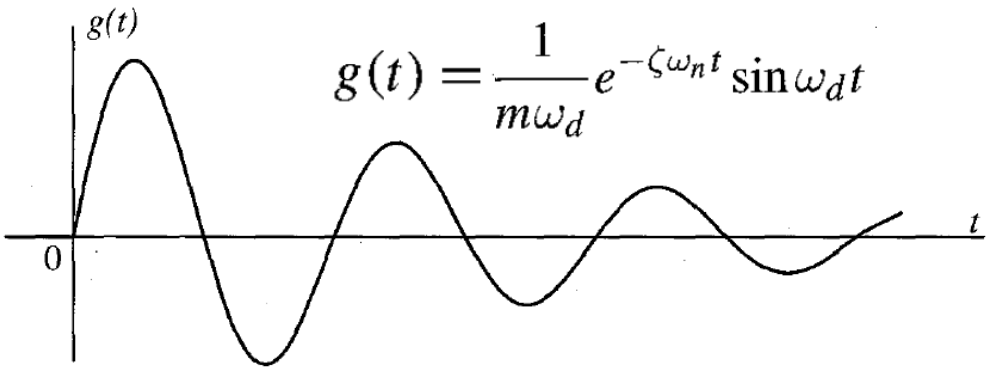
$$\dot{g}(0+) = \frac{1}{m}$$

- به عبارت دیگر می توان گفت: ضربه واحد با زمان بسیار کوتاه معادل است با سرعتی به اندازه $\frac{1}{m}$ (۱ واحد نیرو-زمان دارد).
- بنابراین پاسخ سیستم تحت یک ضربه واحد با زمان بسیار کوتاه همان پاسخ ارتعاش آزاد سیستم و با سرعت اولیه $\frac{1}{m}$ و جابه جایی اولیه صفر است.

انتگرال دوهامل

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- پس پاسخ سیستم به ضربه واحد به صورت زیر خواهد بود.



$$g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

FIGURE 4.5
Impulse response of a mass-damper-spring system

- حال اگر ضربه با مقدار $F(\tau)$ با تاخیر زمانی τ اعمال شود، داریم:

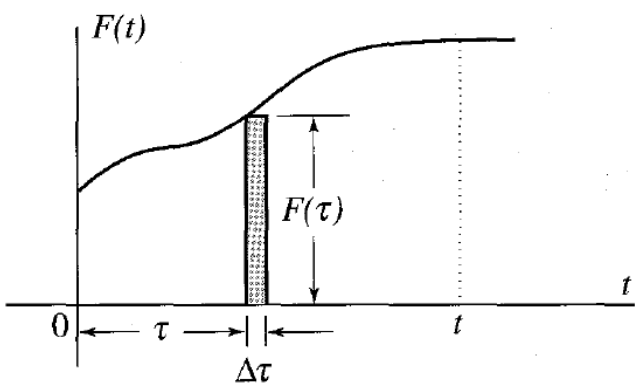
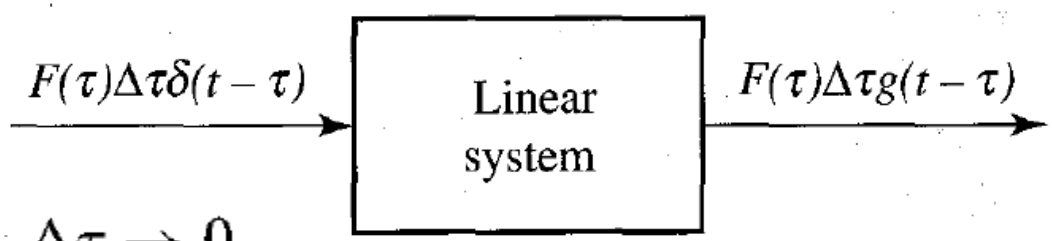


FIGURE 4.13
Arbitrary excitation



$$\Delta\tau \to 0$$

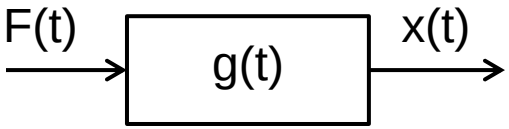
انتگرال دوهامل

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- بنابراین

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

- همانطور که در اسلاید قبل دیدیم، پاسخ سیستم به ضربه واحد تنها به مشخصات سیستم بستگی دارد (این خصوصیت ضربه واحد است). به همین دلیل از آن برای نشان دادن سیستم استفاده می شود. یعنی



- اگر محرک ورودی شتاب باشد پارامتر m از مخرج g حذف می شود.