www.NoavaranGermi.ir

ارتعاشات پیشا و کاربرد آن در مهندسی زلزله

در نرم افزار های

MatLab و SeismoSignal

جلسه ششم: مقدمه ای بر ارتعاشات
پیشا (ادامه ویژگی های احتمالاتی)

محمد حسین بهشتی خواه
beheshtikhah@gmail.com

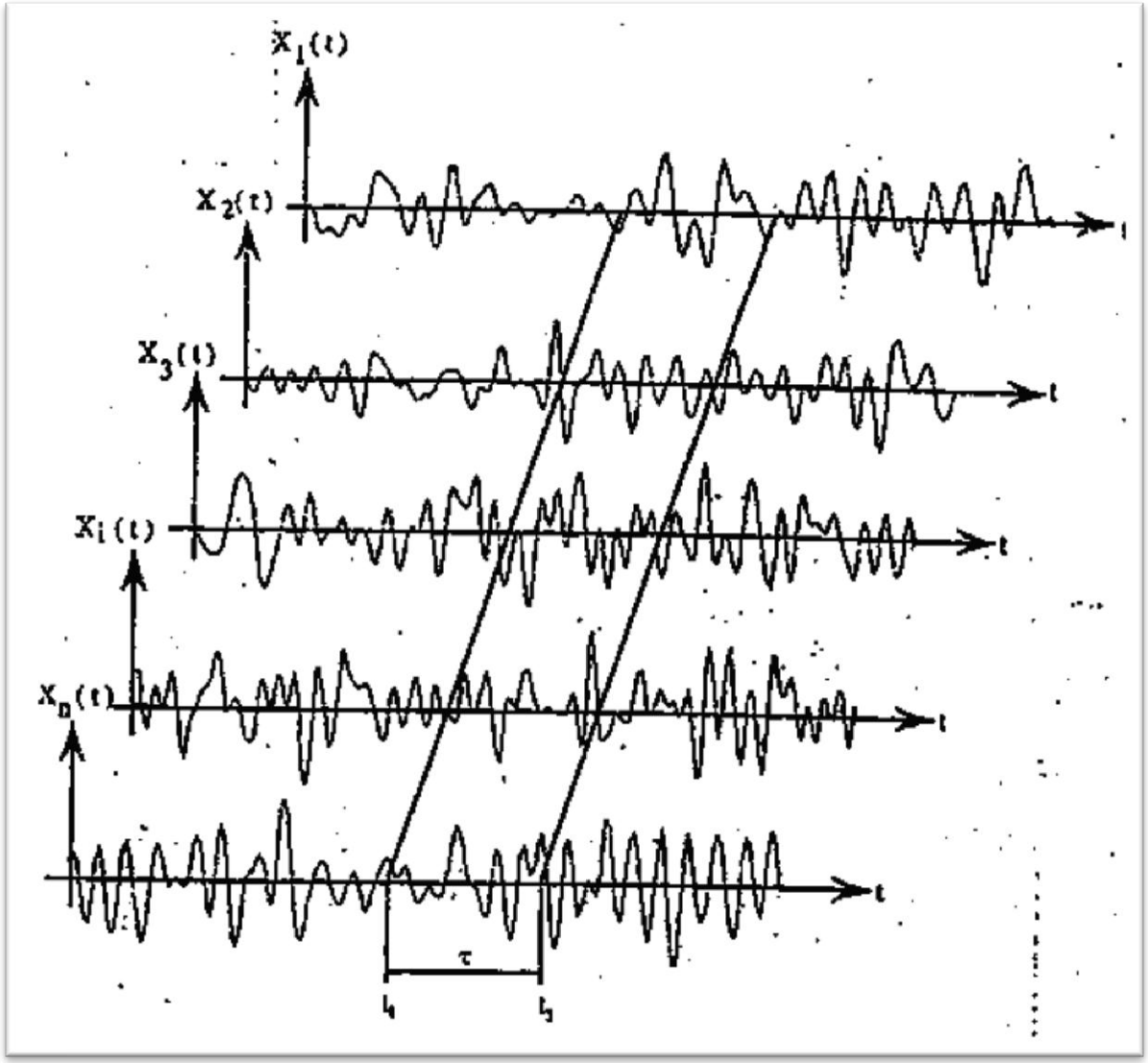
بهار ۱۳۹۱

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

توابع همبستگی
(Correlation Functions)

مقدمه

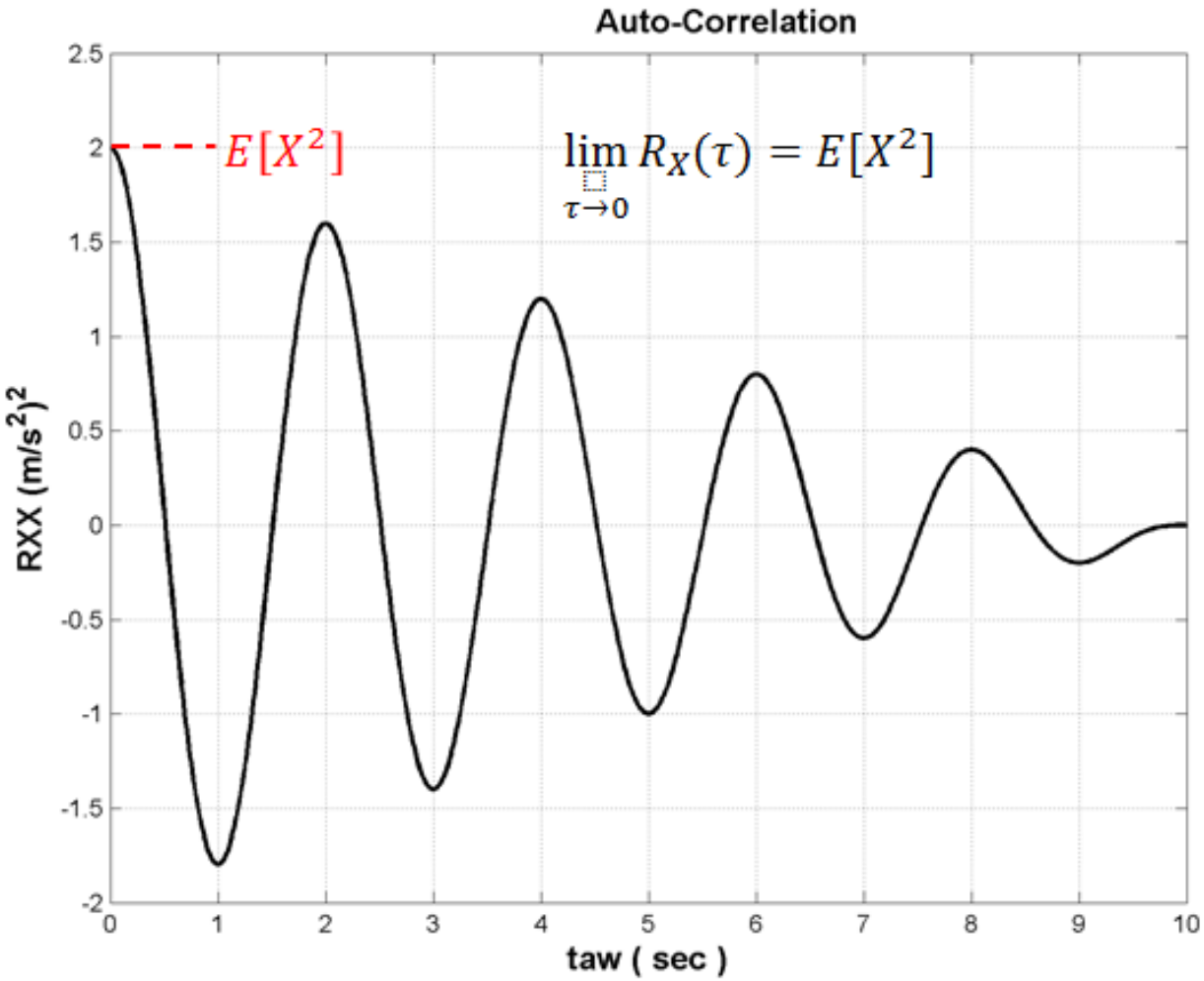
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- در بررسی دو یا چند متغیر، ارتباط مشخص بین آن ها از اهمیت خاصی برخوردار است. اما هنگامیکه یکی یا همه متغیر ها از نوع فرآیند پیشا باشد، دیگر رابطه واحدی بین آن ها وجود نخواهد داشت و برای مقدار خاصی از یک متغیر امکان وجود چندین مقدار برای متغیر دیگر می باشد. بنابراین موضوع باید از دیدگاه آمار و احتمالات و با استفاده از تئوری فرآیند های پیشا بررسی و میزان همبستگی و ارتباط آن ها تعیین شود.

تابع خود همبستگی (شکل کلی)
Auto-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- اگر بخواهیم بدانیم در فرآیند X، چه ارتباطی بین زمان t_1 و زمان t_2 وجود دارد، عملگر E (میانگین مجموع) را به ضرب نمونه های مربوط به این زمان ها در فرآیند اعمال می کنیم. به عبارت دیگر:

$$R_{XX} = R_X(t_1, t_2) = R_X(t, \tau) = E[X(t_1)X(t_2)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_1)x_i(t_2)$$

که

$$\tau = t_2 - t_1$$

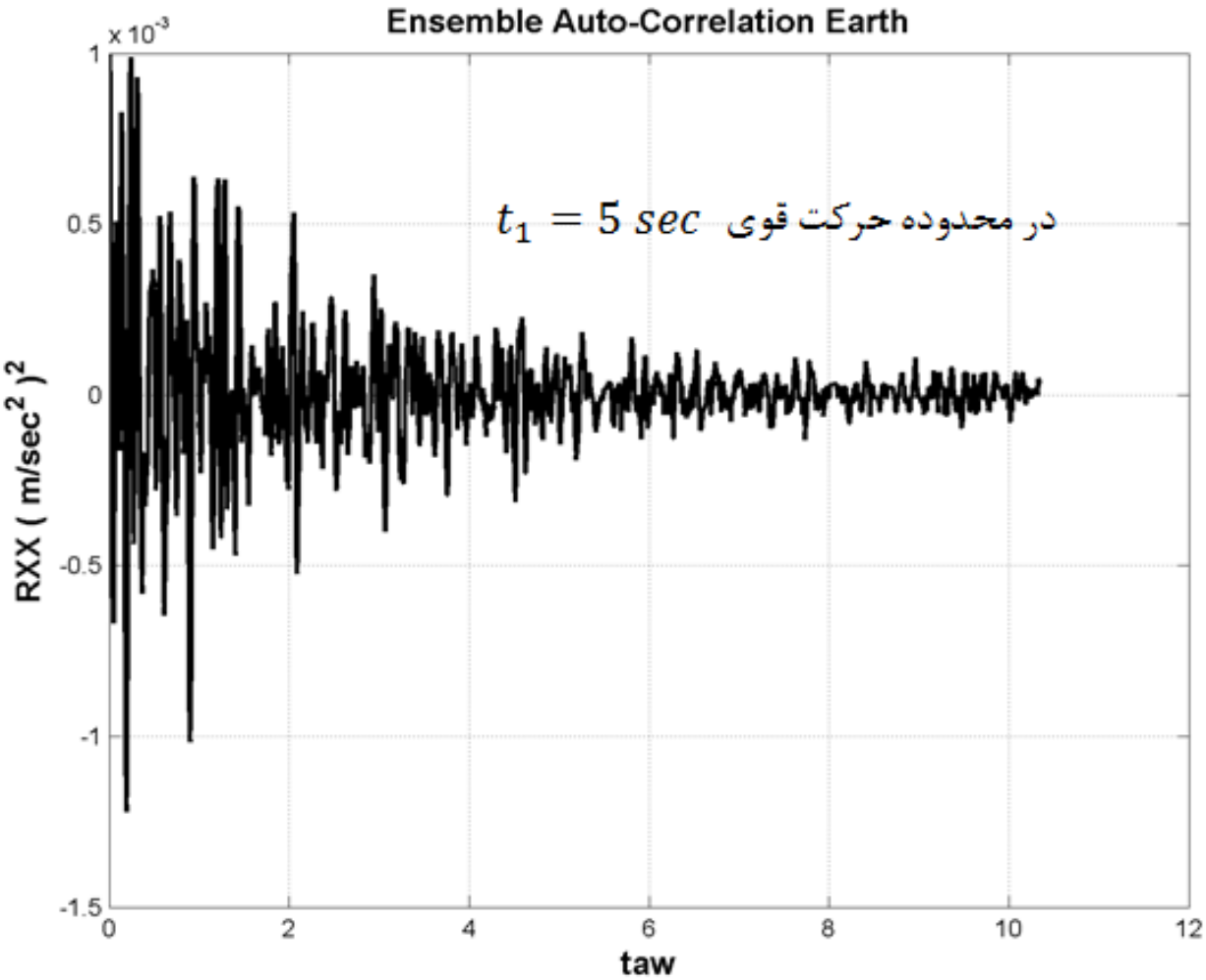
- اگر فرض کنیم فرآیند مانا است:

$$R_{XX} = R_X(\tau)$$

- شکل کلی این تابع، در حالت کلی، برای یک فرآیند مانا و نرمال به صورت روبرو است.

تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله
(Ensemble) Auto-Correlation Function

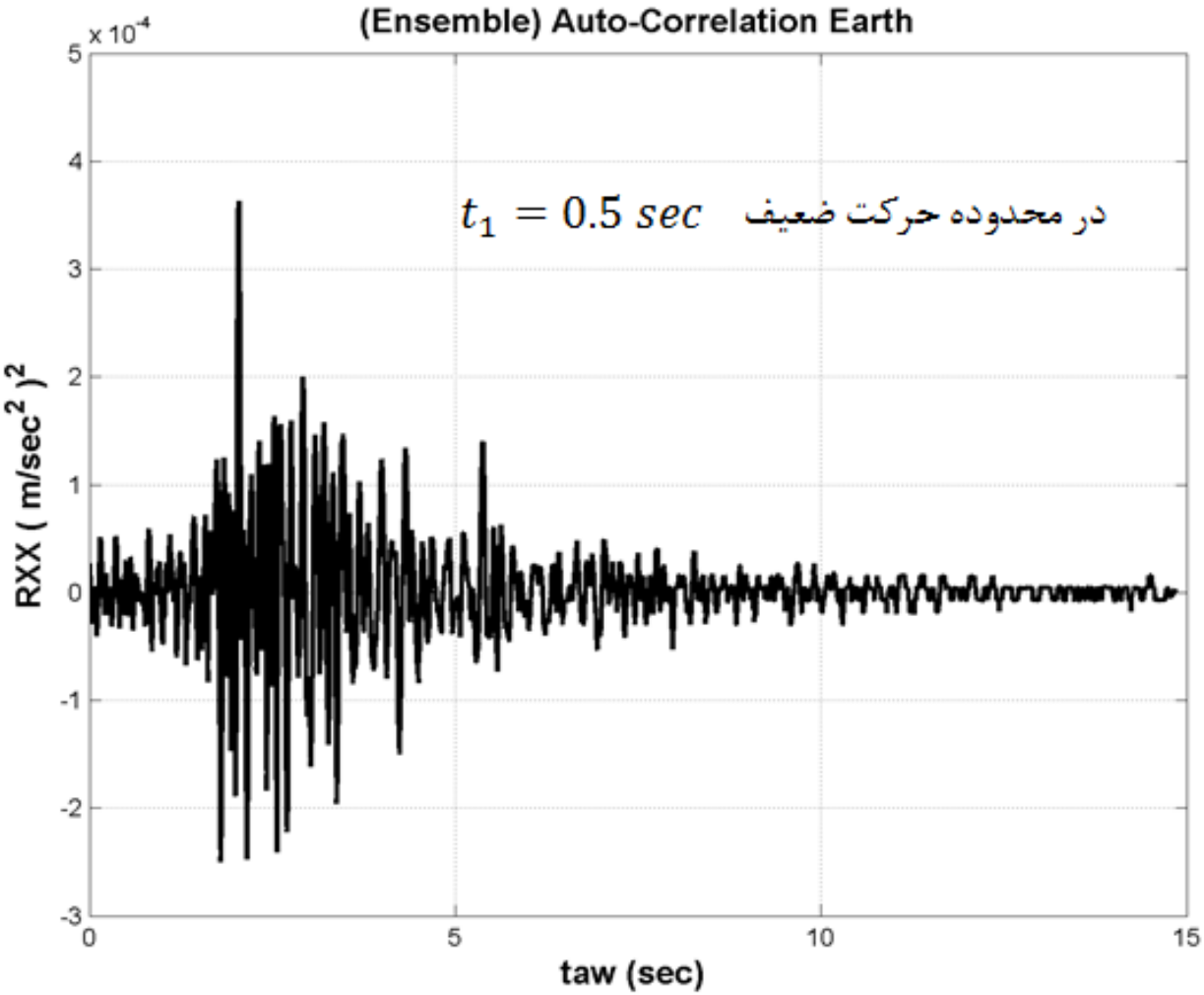
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- دانستیم که زلزله به شدت نامانا است. یعنی ویژگی های احتمالاتی آن وابسته به زمان است. بنابراین با انتخاب زمان های متفاوتی از آن نمودارهای متفاوتی برای تابع خود همبستگی به دست می آید. در حالت کلی، می توان فرض کرد فرآیند زلزله در ناحیه حرکت قوی، مانا است. بنابراین با انتخاب زمان انتخابی در این ناحیه شکل کلی تابع خود همبستگی همانند شکل کلی این تابع در حالت مانا خواهد بود (اسلاید قبل!).

تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله
(Ensemble) Auto-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



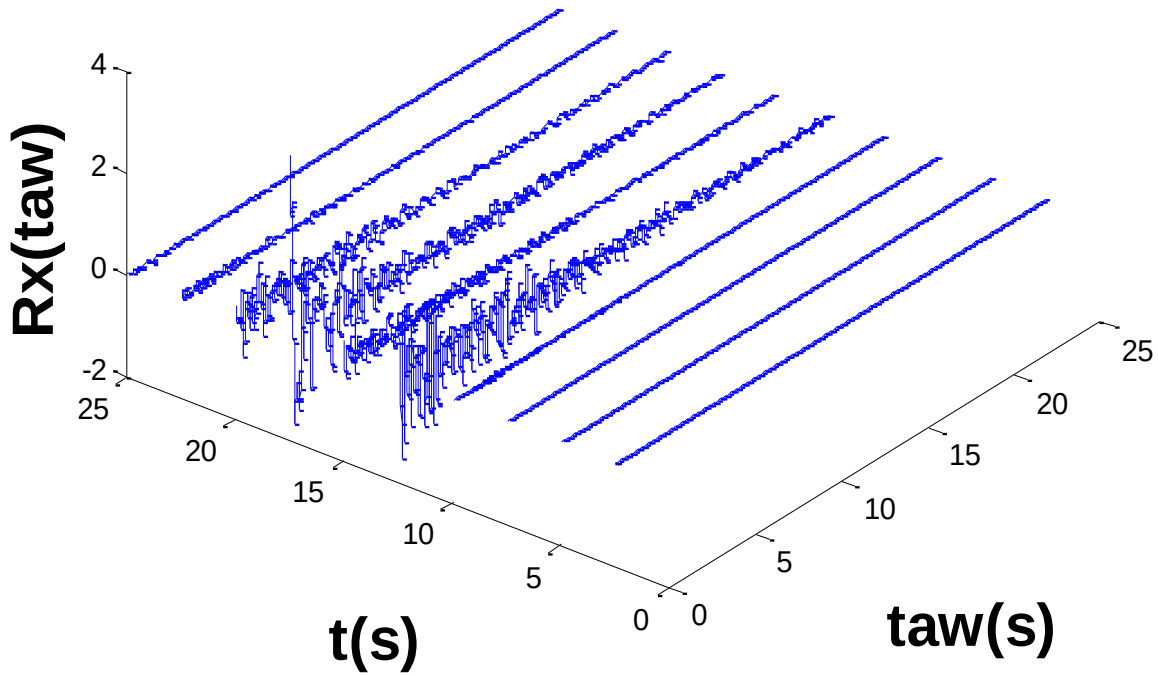
- در حالتی که زمان انتخابی از نواحی غیر از محدوده حرکت قوی انتخاب شود، این شکل کلی، همانند شکل روبرو، رعایت نخواهد شد.
- توجه:

τ زمان نیست، بلکه اختلاف زمان نمونه برداری است.

تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله
(Ensemble) Auto-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

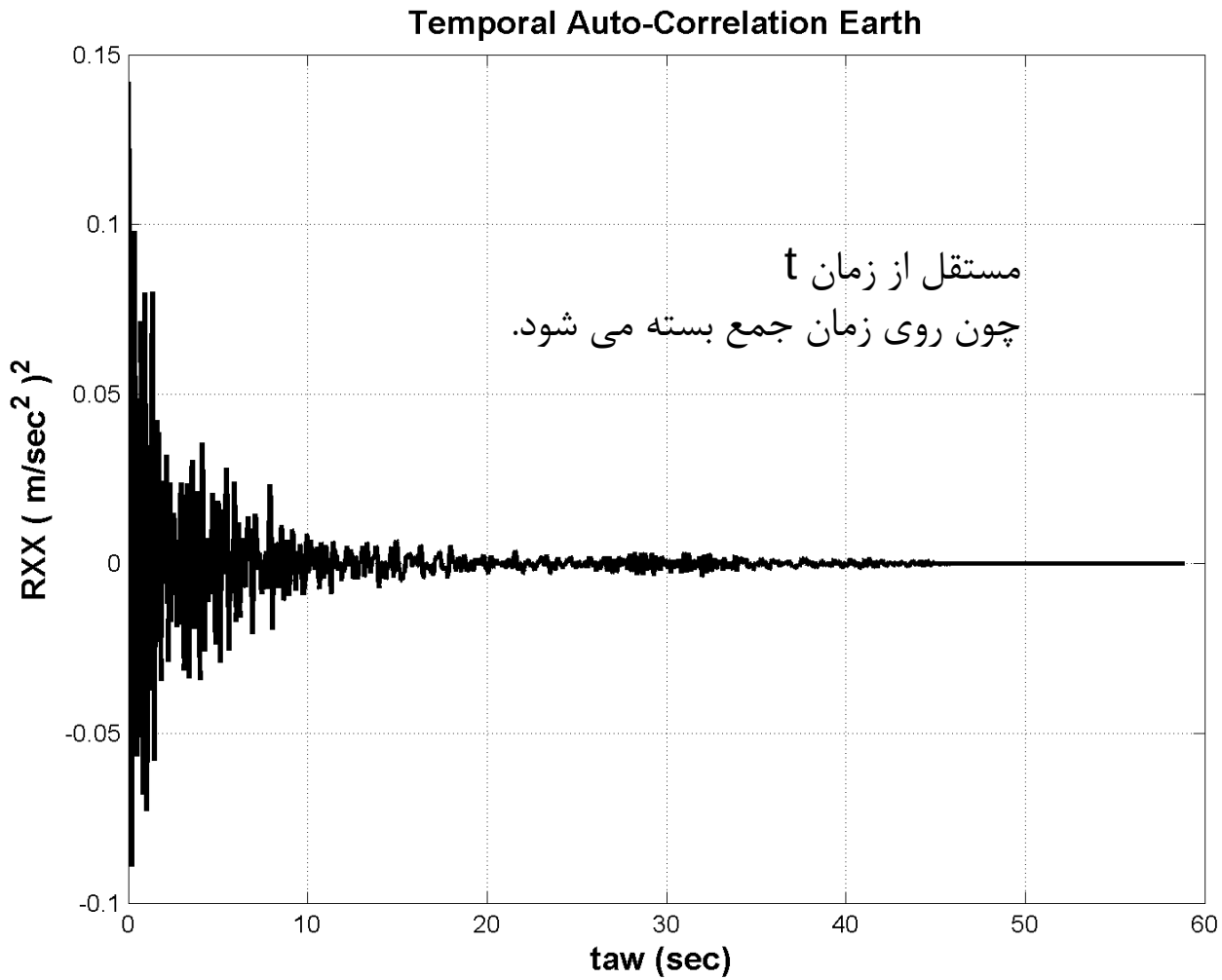
Time Dependent Auto Correlation x



- شکل زیر نمودار تابع خودهمبستگی بین ۱۰ مولفه شتابنگاشت اصلاح شده را نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود، نمودار Rx در زمان (t) های متفاوت شکل کاملاً متفاوتی را به خود می گیرد، که این دلیلی بر نامانایی زلزله است.

تابع خود همبستگی موضعی زلزله
Temporal Auto-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- این تابع بیانگر همبستگی بین مقادیر یک نمونه از فرآیند پیشا می باشد. به عبارت دیگر:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i(t_1)x_i(t_2)$$

- این تابع به زمان وابسته نیست، چون مربوط به یک نمونه از فرآیند است و نه یک فرآیند.

کد متلب: تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- تعداد ۵ شتابنگاشت را در MatLab خوانده و به صورت ستونی در متغیر X ذخیره کنید. در ادامه کد زیر را وارد کرده تا تابع خود همبستگیِ این مجموعه ۵ تایی محاسبه شود.

```
dt=0.005; t=0:dt:(length(X)-1)*dt;
E2=mean(X.^2,2);          %(Ensemble) Mean Square (Second Order Mean)
mm=length(X);
for i=1000                %t1
```

- i بیانگر زمان انتخابی است. این زمان برابر با ۵ (ثانیه) در نظر گرفته شده است. دقت شود که در حلقه، به جای کار با زمان، با تعداد گام زمانی کار می کنیم. (۰.۰۰۵*۱۰۰۰=۵ ثانیه)

```
    for j=0:mm-i          %taw
```

- هرچه i (زمان انتخابی) بیشتر باشد، لازم است حداکثرِ اختلافِ زمانی کمتر باشد، بنابراین حداکثر بردار j به mm-i محدود شده است.

ضرب نمونه های یک فرآیند در دو زمان مختلف

```
XX(j+1,:)=X(i,:).*X(i+j,:);
```

- در اولین سیکل از حلقه، مقدار j صفر است. و این یعنی taw صفر در نظر گرفته شده است. بنابراین، E[X^2] محاسبه می شود. توجه شود، که در کل حلقه ها i ثابت است و مقدار j از صفر تا ۵ ثانیه کمتر از زمان کل تغییر می کند.

```
    end
end
```

کد متلب: تابع خود همبستگی (مجموعه) زلزله

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

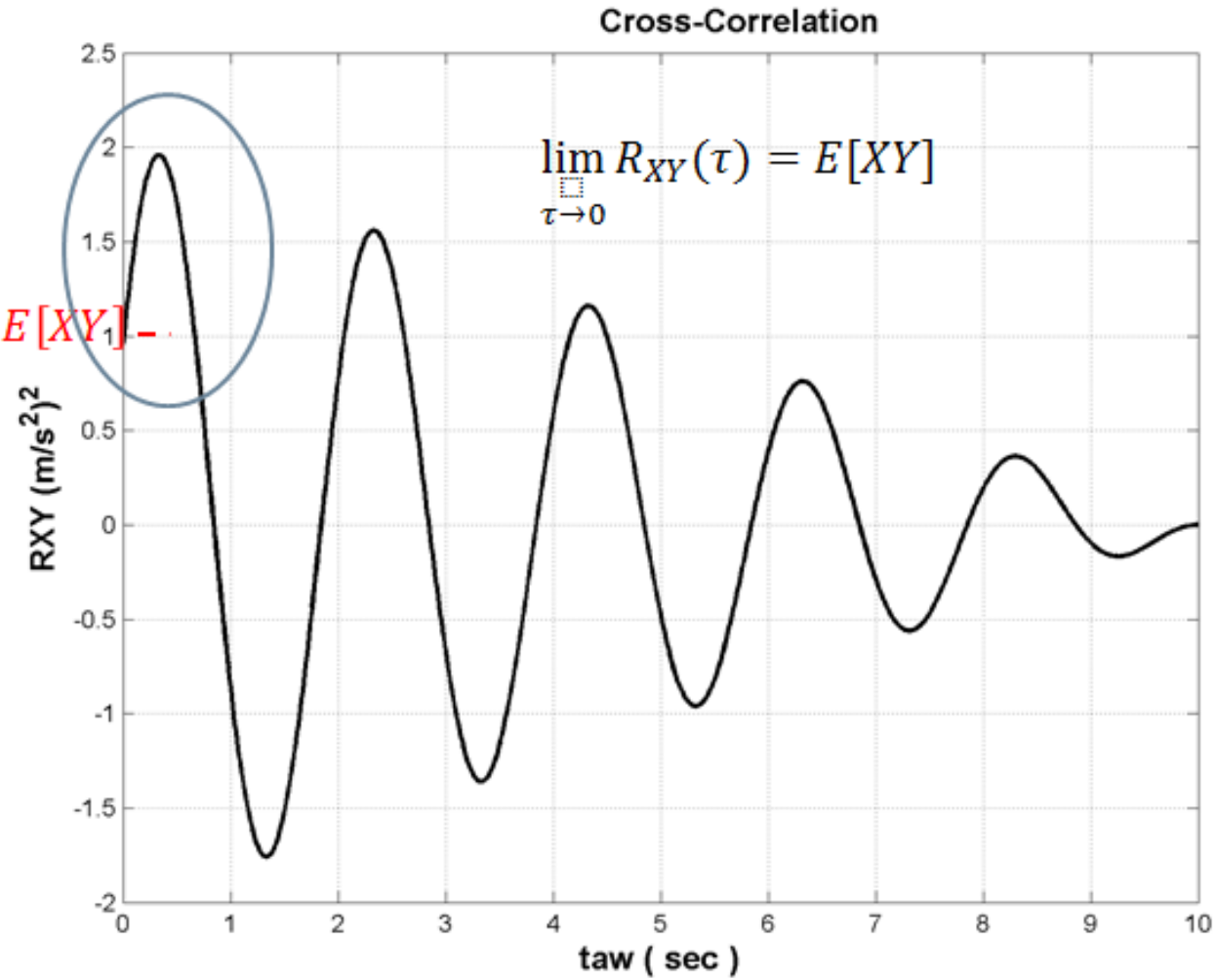
- RXX=mean(XX,2);
- عملگر E به ضرب نمونه ها اعمال می شود.
- taw=0:dt:(mm-i)*dt;
- تعداد درایه های ماتریس taw باید با تعداد درایه های ماتریس RXX برابر باشد.
- figure(3);plot(taw,RXX);
- Sefr=E2(i)-RXX(1); %Check Point
- قبلاً اثبات کردیم، بیشترین مقدار RXX برابر با E[X^2] است، بنابراین تفاضل آنها باید صفر باشد. این موضوع برای اطمینان از صحتِ کدنویسی، کنترل شده است.

تمرین:

از دستور xcorr برای محاسبه تابع خود همبستگی استفاده کنید.

تابع همبستگی متقاطع (شکل کلی)
Cross-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- اگر بخواهیم بدانیم فرآیند X در زمان t_1 و با فرآیند Y در زمان t_2 چه ارتباطی دارد، عملگر E (میانگین مجموع) را به ضرب نمونه های مربوط به این زمان ها در فرآیند X و Y اعمال می کنیم. به عبارت دیگر:

$$R_{XY} = R_{XY}(t_1, t_2) = R_X(t, \tau)$$
$$= E[X(t_1)Y(t_2)]$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_1)y_i(t_2)$$

τ : اختلاف زمان نمونه برداری

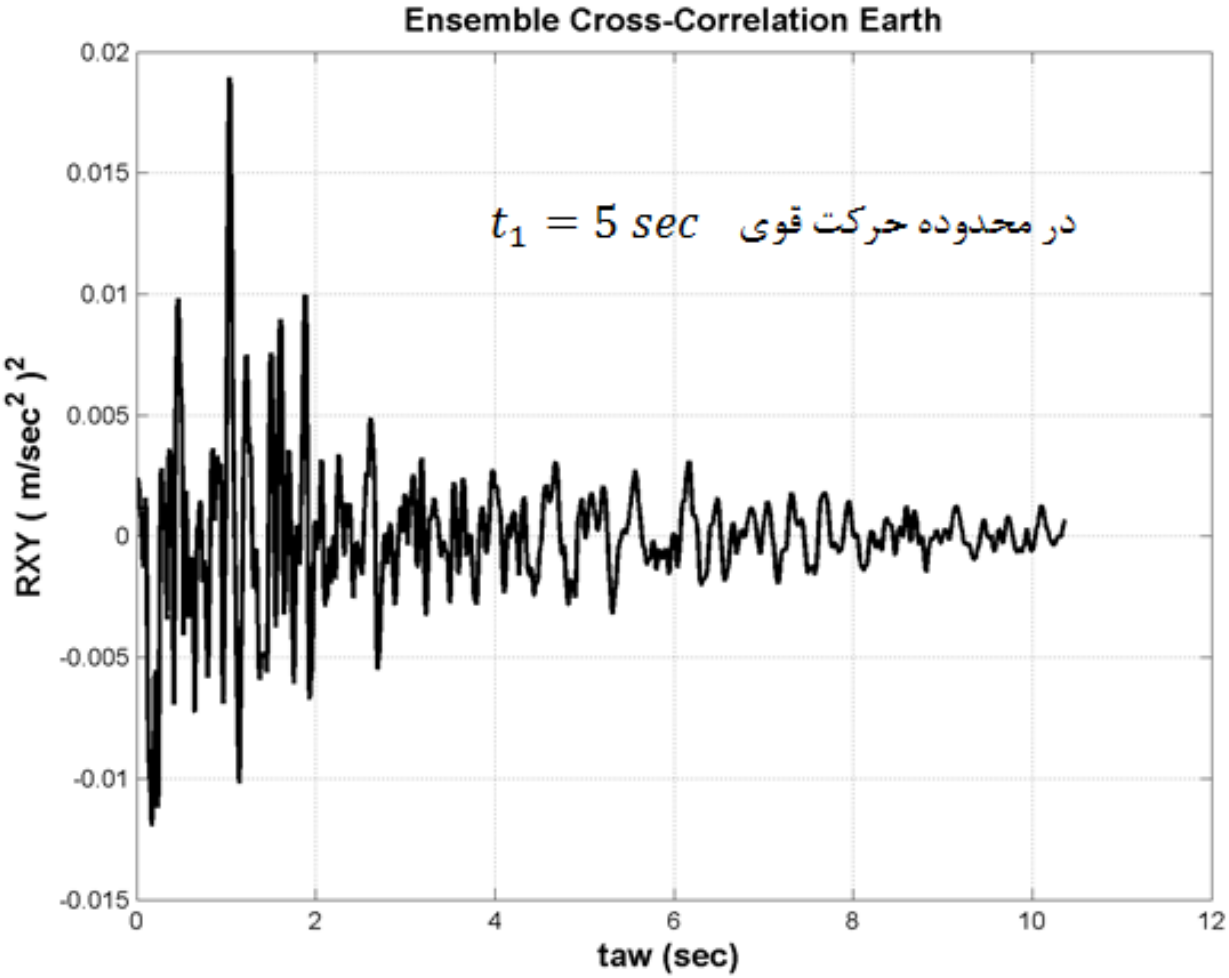
- اگر فرض کنیم فآیند مانا است:

$$R_{XX} = R_X(\tau)$$

- شکل این تابع، در حالت کلی، برای یک فرآیند مانا و نرمال به صورت روبرو است.

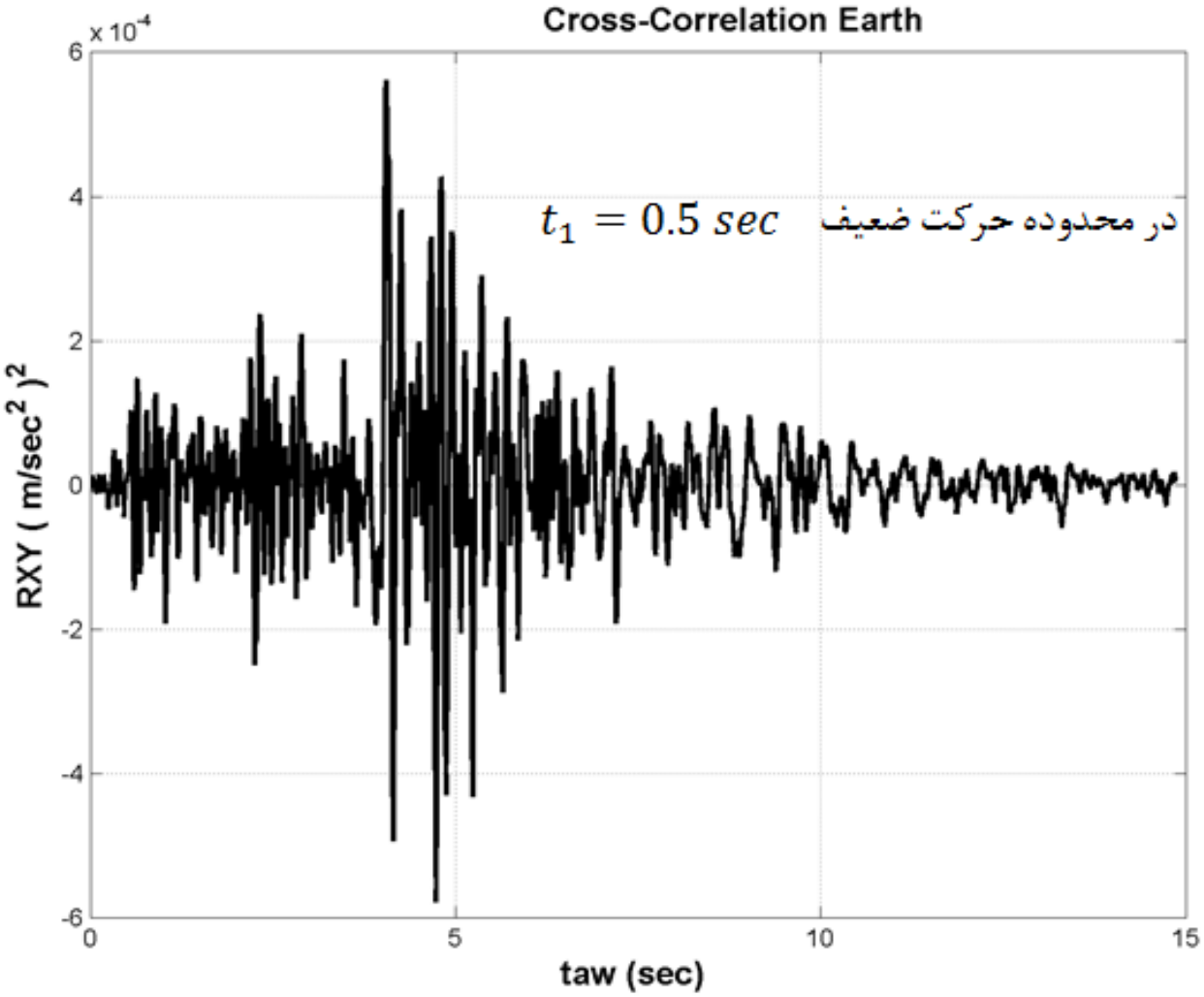
تابع همبستگی متقاطع (زلزله)
Cross-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



تابع همبستگی متقاطع (زلزله)
Cross-Correlation Function

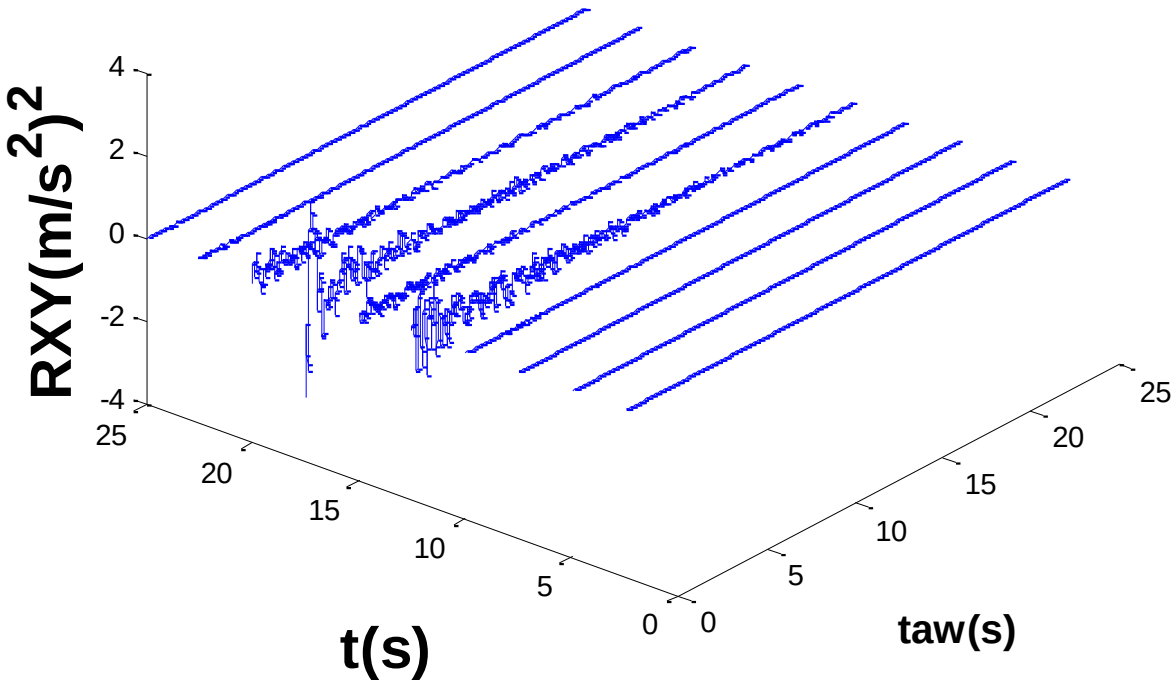
beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



تابع همبستگی متقاطع (زلزله)
Cross-Correlation Function

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

Time Dependent Cross Correlation xy



کد متلب: تابع همبستگی متقاطع

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- این کد نیز همانند کد قبلی عمل کرده با این تفاوت که فرآیند Y یک ماتریس حاوی ۵ شتابنگاشت ستونی متفاوت با X است.

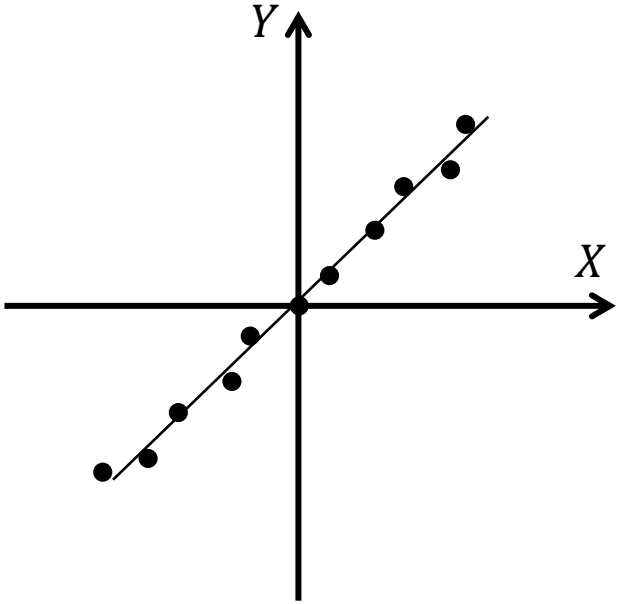
```
dt=0.005; t=0:dt:(length(X)-1)*dt;
mm=length(X);
for i=1000                %t1
    for j=0:mm-i          %taw
            XY(j+1,:)=X(i,:).*Y(i+j,:);
    end
end
RXY=mean(XY,2);
taw=0:dt:(length(X)-i)*dt;
figure(4);plot(taw,RXY);
```

تمرین:

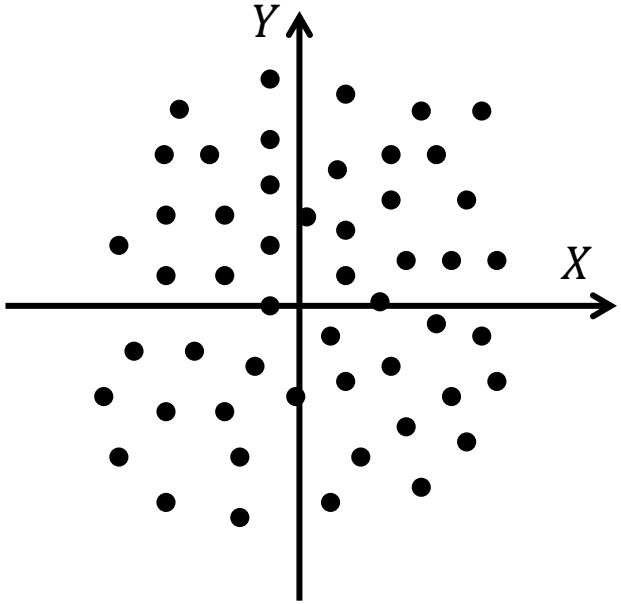
از دستور xcorr برای محاسبه تابع همبستگی متقاطع استفاده کنید.

تعریف ضریب همبستگی
Correlation Coefficient

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



دو فرآیند همبسته خطی

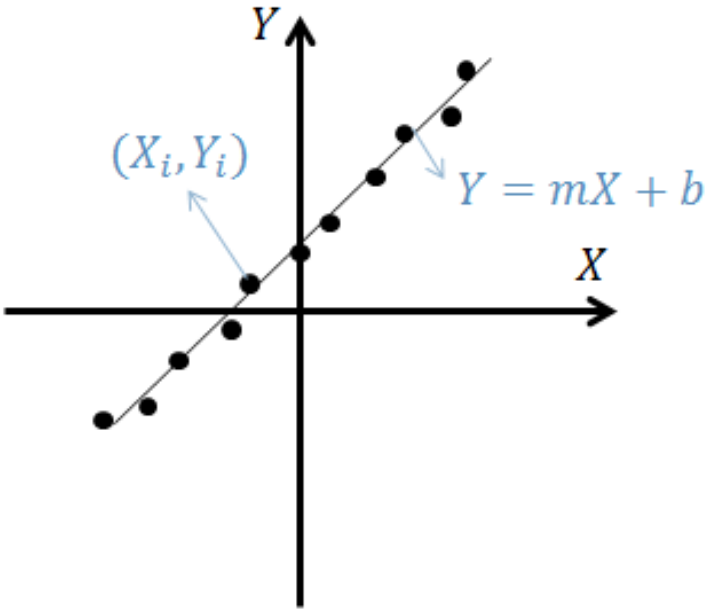


دو فرآیند نابسته

- یکی از روش های مرتبط ساختن فرآیندها، روش حداقل نمودن مجموع مربعات انحرافهای بین آن ها می باشد. این روش در محاسبه ضریب همبستگی استفاده خواهد شد.

ضریب همبستگی خطی
Linear Correlation Coefficient

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



دو فرآیند همبسته خطی

- X (مثلاً قد افراد جامعه) و Y (مثلاً وزن افراد جامعه) دو فرآیند پیشا هستند. با استفاده از رگرسیون خطی Y روی X داریم:

خطا برای یک نمونه $\Delta_Y^2 = (Y - Y_i)^2$

خطا برای یک فرآیند $E[\Delta_Y^2] = E[(mX + b - Y)^2]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial m} = 2E[X(mX + b - Y)] \\ \quad = mE[X^2] + bE[X] - E[XY] = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 2E[mX + b - Y] \\ \quad = mE[X] + b - E[Y] = 0 \end{cases}$$

ضریب همبستگی خطی
Linear Correlation Coefficient

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- با حل دو معادله و دو مجهول داریم:

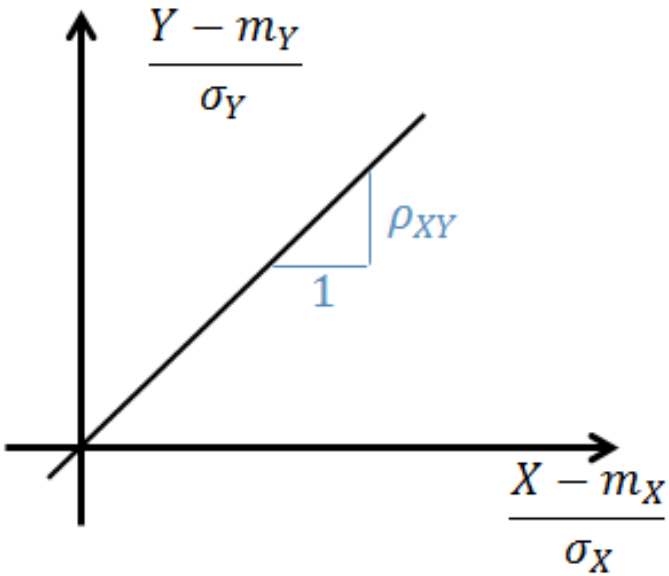
$$\begin{cases} b = E[Y] - mE[X] \\ m = \dfrac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - E[X]^2} = \dfrac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{E[(X - m_X)^2]} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}^2} = \dfrac{Cov_{XY}}{\sigma_{XX}^2} \end{cases}$$

$$Y = mX + b = mX + E[Y] - mE[X] = m\left(X - \underbrace{E[X]}_{m_X}\right) + \underbrace{E[Y]}_{m_Y}$$

$$Y = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{E[(X - m_X)^2]}(X - m_X) + m_Y$$

ضریب همبستگی
Correlation Coefficient

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه



- رابطه رگرسیون را بدون بعد می کنیم:

$$\underbrace{\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}}_{\text{بدون بعد}} = \overbrace{\frac{E[(X-m_X)(Y-m_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y}}^{\rho_{XY}} \underbrace{\frac{X-m_X}{\sigma_X}}_{\text{بدون بعد}}$$

$$\rho_{XY} = \frac{E[(X-m_X)(Y-m_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

- روابط زیر را اثبات کنید:

$$-1 \le \rho_{XY} \le 1$$

$$\rho_{XY} = 1 \Rightarrow Cov_{XY} = \sigma_X\sigma_Y$$ همبستگی کامل

$$\rho_{XY} = 0 \Rightarrow E[XY] = m_X m_Y$$ بدون همبستگی

- یادآوری:

$$\sigma_X^2 = \sigma_{XX}^2 = E[(X-m_X)^2] = v_X$$

$$E[XY] = R_X(t,\tau)$$

$$E[(X-m_X)^2] = E[X^2] - m_X{}^2$$

$$R.M.S = \sqrt{E[X^2]}$$

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

ویژگی های احتمالاتی در فضای فرکانس

تابع چگالی طیفی

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- یادآوری: اگر X یک فرآیند باشد:

$$\begin{cases} X_{(t)} \xrightarrow{FT} X(\omega) \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{(t)} e^{i\omega t} dt \end{cases}$$

در حالت کلی مختلط است

- همانطور که از یک فرآیند تبدیل فوریه می گیریم، از ویژگی های احتمالاتی آن نیز می توانیم تبدیل فوریه بگیریم.

$$R_X(\tau) \xrightarrow{FT} S_X(\omega)$$

تابع چگالی طیفی

$$\begin{cases} S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

چگالی طیفی تعریف کمی از یک فرآیند در محدوده فرکانسی است و بیانگر تغییرات، اهمیت و شدت فرآیند در فرکانس های متفاوت است. (شبیه طیف فوریه است)

خاصیت ها

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- تابع خودهمبستگی زوج است: چون

$$R_X(\tau) = E\left[X_{\underbrace{(t)}_{t-\tau}} X_{\underbrace{(t+\tau)}_{t}}\right] = E\left[X_{(t)} X_{(t-\tau)}\right] = R_X(-\tau)$$

- بنابراین، تابع چگالی طیفی، یک تابع حقیقی و زوج است. زیرا

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)[cos\omega\tau - isin\omega\tau]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)cos\omega\tau d\tau + i\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_X(\tau)}_{\text{زوج}} \underbrace{sin\omega\tau}_{\text{فرد}} d\tau}_{\text{صفر}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)cos\omega\tau\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cos(-\omega)\,\tau d\tau = S_X(-\omega)$$

- تابع چگالی طیفی، طبق تئوری بوخنر (Bochner)، مثبت است.
- سطح زیر نمودار تابع چگالی طیفی برابر با $E[X^2]$ است. چون

$$\tau = 0 \Rightarrow R_X(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = E[X^2] = \sigma_X^2 + m_X^2 = 2\int_{0}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega$$

- بتابراین واحد چگالی طیفی برابر است با: $\frac{\text{واحد مربع فرآیند}}{\text{واحد فرکانس}}$
- تابع همبستگی متقاطع زوج نیست. چون $R_{XY}(\tau) = E\left[X_{\underbrace{(t)}_{t-\tau}} Y_{\underbrace{(t+\tau)}_{t}}\right] = E\left[Y_{(t)} X_{(t-\tau)}\right] = R_{YX}(-\tau)$

خاصیت ها

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

$$\begin{cases} R_{\dot{x}}(\tau) = -\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} R_x(\tau) \\ R_{\ddot{x}}(\tau) = -\dfrac{\partial^4}{\partial\tau^4} R_x(\tau) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \\ S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[X^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega \\ E[\dot{X}^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_X(\omega)d\omega \\ E[\ddot{X}^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_X(\omega)d\omega \end{cases}$$

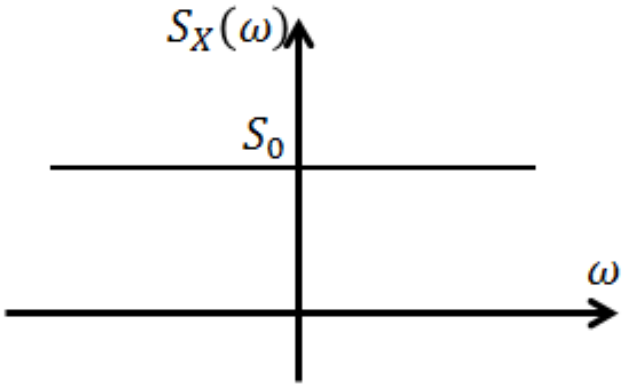
- یادآوری:

اگرچه تئوری فوریه در اصل برای توابع متناوب است، برای هر تابع غیر متناوب نیز قابل تعمیم است.

نوفه سفید

beheshtikhah@gmail.com محمد حسین بهشتی خواه

- برای $S_X(\omega)$ می توان مدل ریاضی در نظر گرفت.
- یکی از این مدل ها whitenoise یا نوفه سفید است که شکل آن به صورت روبرو است. خصوصیت اصلی آن عدم وابستگی به فرکانس است.



- زلزله در کانون را می توان با نوفه سفید مدل کرد. یعنی وقتی rupture اتفاق می افتد، انرژی زلزله در تمام فرکانس ها به یک میزان آزاد می شود. چون هنوز هیچ فیلتری از جانب خاک روی آن صورت نگرفته است. شرح این موضوع به جلسات آینده موکول می شود.