



## Structural Analysis II

تحلیل سازه ها ۲

روش شیب افت  
Slope Deflection

دکتر مهدی بنزاده

گروه سازه و زلزله

دانشکده عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر



مرجع ۱: صفحه 240-229 (روش تعمیر شلنگ سوزاکری)	۲۲	یکشنبه	شهریور	۱
مرجع ۲: صفحه 20-28 و 63-47	۲۳	سه شنبه	شهریور	۲
مرجع ۳: صفحه 267-216	۲۴	یکشنبه	شهریور	۳
مرجع ۴: صفحه 310-280 (بسته مربوط به ترمز)	۲۵	سه شنبه	شهریور	۴
مرجع ۵: صفحه 444-393	۲۶	یکشنبه	شهریور	۵
مرجع ۶: صفحه 330-312	۲۷	سه شنبه	شهریور	۶
مرجع ۷: صفحه 261-221	۲۸	یکشنبه	شهریور	۷
مرجع ۸: صفحه 384-373	۲۹	سه شنبه	مهر	۸
مرجع ۹: صفحه 366-363 (فیلتر ماکزول)	۳۰	یکشنبه	مهر	۹
مرجع ۱۰: صفحه 279-268 (فیلتر ماکزول)	۳۱	سه شنبه	مهر	۱۰
مرجع ۱: صفحه 338-297	۱	یکشنبه	مهر	۱۱
مرجع ۲: صفحه 95-67	۲	سه شنبه	مهر	۱۲
مرجع ۳: صفحه 349-299	۳	یکشنبه	مهر	۱۳
مرجع ۴: صفحه 609-443	۴	سه شنبه	مهر	۱۴
مرجع ۵: صفحه 551-532	۵	یکشنبه	مهر	۱۵
مرجع ۶: صفحه 402-369	۶	سه شنبه	مهر	۱۶
مرجع ۷: صفحه 525-513 (فیلتر)	۷	یکشنبه	مهر	۱۷
مرجع ۸: صفحه 564-525 (فیلتر)	۸	سه شنبه	مهر	۱۸
مرجع ۱: صفحه 374-343 (پرونده انتقال چاقی)	۹	یکشنبه	مهر	۱۹
مرجع ۲: صفحه 405-374 (پرونده انتقال چاقی)	۱۰	سه شنبه	مهر	۲۰
مرجع ۳: صفحه 139-85	۱۱	یکشنبه	مهر	۲۱
مرجع ۴: صفحه 388-355	۱۲	سه شنبه	مهر	۲۲
مرجع ۵: صفحه 626-609	۱۳	یکشنبه	مهر	۲۳
مرجع ۶: صفحه 575-551	۱۴	سه شنبه	مهر	۲۴
مرجع ۷: صفحه 456-405	۱۵	یکشنبه	مهر	۲۵
مرجع ۸: صفحه 675-571	۱۶	سه شنبه	مهر	۲۶
مرجع ۱: صفحه 171-143	۱۷	یکشنبه	مهر	۲۷
مرجع ۲: صفحه 540-485	۱۸	سه شنبه	مهر	۲۸
مرجع ۳: صفحه 557-536	۱۹	یکشنبه	مهر	۲۹
مرجع ۴: صفحه 752-697	۲۰	سه شنبه	مهر	۳۰
مرجع ۱: صفحه 297-277	۲۱	یکشنبه	مهر	۳۱
مرجع ۲: صفحه 183-173	۲۲	سه شنبه	مهر	۳۲
مرجع ۳: صفحه 150-112	۲۳	یکشنبه	مهر	۳۳
مرجع ۴: صفحه 616-600	۲۴	سه شنبه	مهر	۳۴
مرجع ۵: صفحه 240-230	۲۵	یکشنبه	مهر	۳۵
مرجع ۶: صفحه 163-147	۲۶	سه شنبه	مهر	۳۶
مرجع ۷: صفحه 527-503	۲۷	یکشنبه	مهر	۳۷
مرجع ۸: صفحه 369-322	۲۸	سه شنبه	مهر	۳۸
مرجع ۹: صفحه 777-753	۲۹	یکشنبه	مهر	۳۹

## تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

دکتر مهدی بناراده  
دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
پلی تکنیک تهران



تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم

تحلیل سازه ها ۲  
دکتر مهدی بنزاده  
دانشگاه صنعتی عمران  
پلی تکنیک تهران

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنزاده تحلیل سازه ها ۲

تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم

۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم

تحلیل سازه ها ۲  
دکتر مهدی بنزاده  
دانشگاه صنعتی عمران  
پلی تکنیک تهران


دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنزاده تحلیل سازه ها ۲

**تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت**

- ۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم
- ۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم
- ۳- ابتدا فرض میکنیم تمامی گره های سازه فیکس شده است

دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
دانشکده عمران  
مهدی بنزاده


پلی تکنیک تهران



دانشکده عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر مهدی بنزاده

تحلیل سازه ها ۲




**تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت**

- ۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم
- ۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم
- ۳- ابتدا فرض میکنیم تمامی گره های سازه فیکس شده است
- ۴- سپس گره ها را آزاد میکنیم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
دانشکده عمران  
مهدی بنزاده


پلی تکنیک تهران



دانشکده عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر مهدی بنزاده

تحلیل سازه ها ۲





### تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

- ۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم
- ۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم
- ۳- ابتدا فرض میکنیم تمامی گره های سازه فیکس شده است
- ۴- سپس گره ها را آزاد میکنیم
- ۵- اصل جمع اثر قوا به ما میگوید که سازه اصلی جمع این دو حالت است



### تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

- ۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم
- ۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم
- ۳- ابتدا فرض میکنیم تمامی گره های سازه فیکس شده است
- ۴- سپس گره ها را آزاد میکنیم
- ۵- اصل جمع اثر قوا به ما میگوید که سازه اصلی جمع این دو حالت است
- ۶- به تعداد مجهولات به دنبال رابطه تعادل میگردیم



### تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

- ۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم
- ۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم
- ۳- ابتدا فرض میکنیم تمامی گره های سازه فیکس شده است
- ۴- سپس گره ها را آزاد میکنیم
- ۵- اصل جمع اثر قوا به ما میگوید که سازه اصلی جمع این دو حالت است
- ۶- به تعداد مجهولات به دنبال رابطه تعادل میگردیم
- ۷- مجهولات در روش شیب افت (سختی) تغییر مکان ها میباشند

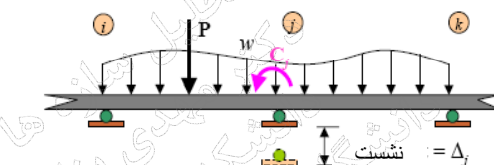


### تحلیل سازه به روش سختی با استفاده از معادلات شیب افت

- ۱- به دنبال یک روش سیستماتیک برای حل سازه به روش سختی هستیم
- ۲- از اصل جمع آثار قوا استفاده میکنیم
- ۳- ابتدا فرض میکنیم تمامی گره های سازه فیکس شده است
- ۴- سپس گره ها را آزاد میکنیم
- ۵- اصل جمع اثر قوا به ما میگوید که سازه اصلی جمع این دو حالت است
- ۶- به تعداد مجهولات به دنبال رابطه تعادل میگردیم
- ۷- مجهولات در روش شیب افت (سختی) تغییر مکان ها میباشند
- ۸- فرض تغییر مکانهای کوچک، خطی بودن مواد و صرف نظر کردن از تغییر شکلهای محوری



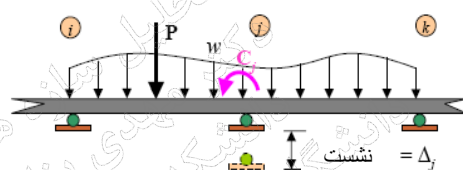
### چگونگی شکل گیری معادلات شیب افت



یک تیر دلخواه

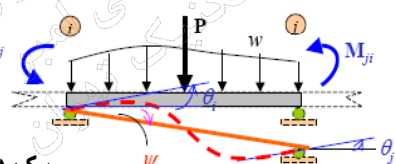


### چگونگی شکل گیری معادلات شیب افت



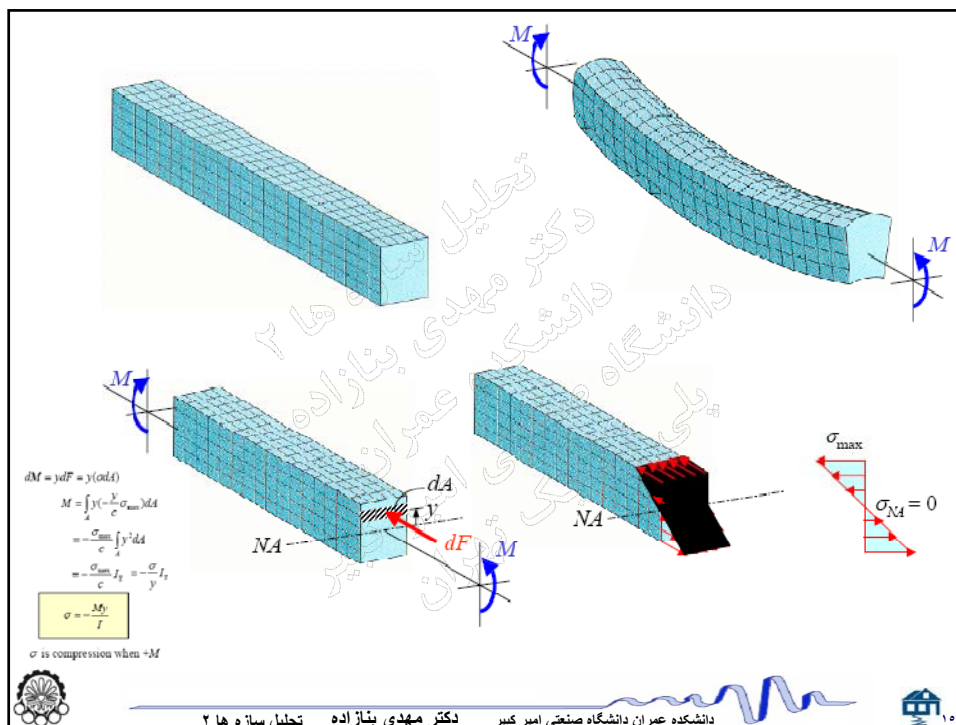
یک تیر دلخواه

نیروی مقاوم ناشی از تغییر شکل خمشی ناشی از ایجاد انحنا در مقاطع تیر است. از انتگرال گیری انحنا دو نوع تغییر مکان در تیر محاسبه میشود  
تغییر مکان چرخشی و انتقالی



یک دهانه دلخواه از یک تیر دلخواه





اصل جمع آثار را برای با توجه به  
اصول شرح داده شده در اسلاید قبل  
برای یک دهانه دلخواه اعمال میکنیم



اصل جمع آثار را برای با توجه به  
اصول شرح داده شده در اسلاید قبل  
برای یک دهانه دلخواه اعمال میکنیم

دکتر مهدی بنژاده  
دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
پلی تکنیک تهران

تحلیل سازه ها ۲

دکتر مهدی بنژاده

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اصل جمع آثار را برای با توجه به  
اصول شرح داده شده در اسلاید قبل  
برای یک دهانه دلخواه اعمال میکنیم

دکتر مهدی بنژاده  
دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
پلی تکنیک تهران

تحلیل سازه ها ۲

دکتر مهدی بنژاده

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اصل جمع آثار را برای با توجه به  
اصول شرح داده شده در اسلاید قبل  
برای یک دهانه دلخواه اعمال میکنیم

اصل جمع آثار را برای با توجه به  
اصول شرح داده شده در اسلاید قبل  
برای یک دهانه دلخواه اعمال میکنیم

اصل جمع آثار را برای با توجه به اصول شرح داده شده در اسلاید قبل برای یک دهانه دلخواه اعمال میکنیم

درجه نامعینی

$\theta_A$

$\theta_A, \theta_B$

دانشگاه علمای اسلام

دانشگاه علمای اسلام

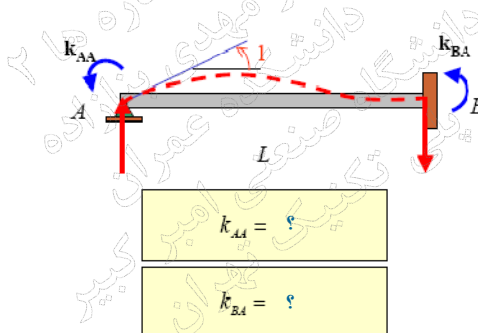
دانشگاه علمای اسلام

۱۱

## مفهوم سختی

$K_{AA}$  لنگر ایجاد شده در تکیه گاه  $A$  به ازای تغییر مکان واحد در تکیه گاه  $A$   
درحالی که تکیه گاه  $B$  فیکس شده است

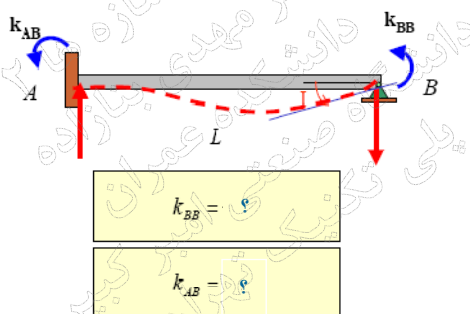
$K_{BA}$  لنگر ایجاد شده در تکیه گاه  $B$  به ازای تغییر مکان واحد در تکیه گاه  $A$   
درحالی که تکیه گاه  $B$  فیکس شده است



## مفهوم سختی

$K_{BB}$  لنگر ایجاد شده در تکیه گاه  $B$  به ازای تغییر مکان واحد در تکیه گاه  $B$   
درحالی که تکیه گاه  $A$  فیکس شده است

$K_{AB}$  لنگر ایجاد شده در تکیه گاه  $A$  به ازای تغییر مکان واحد در تکیه گاه  $B$   
درحالی که تکیه گاه  $A$  فیکس شده است





$k_{AA} =$

$k_{BA} =$

$k_{AA} =$

$k_{BA} =$

$k_{AA} = ?$        $k_{AB} = ?$        $\times \theta_A$   
 $k_{BA} = ?$        $k_{BB} = ?$        $\times \theta_B$

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر مهدی بنژاده

تحلیل سازه ها ۲

$k_{AA} = \frac{4EI}{L}$

$k_{BA} = \frac{2EI}{L}$

$k_{AA} = \frac{4EI}{L}$

$k_{BA} = \frac{2EI}{L}$

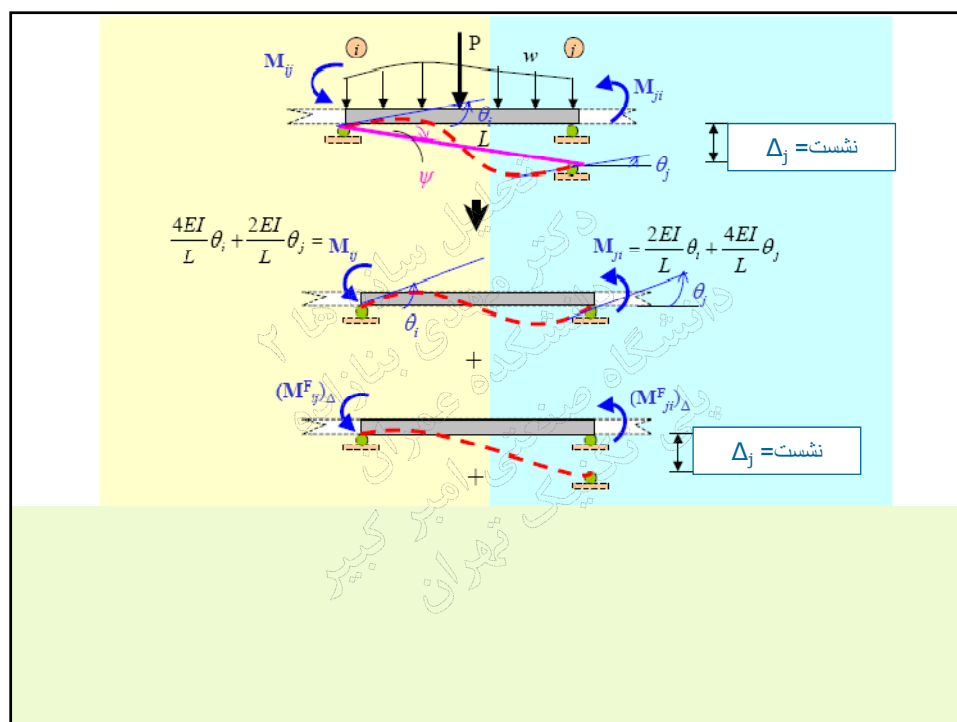
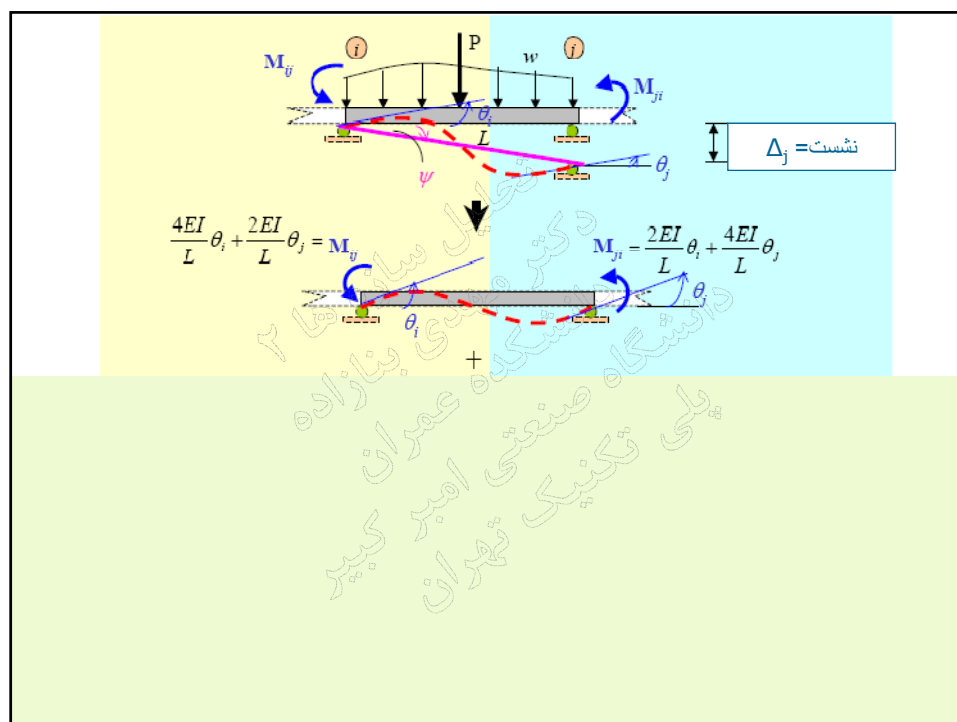
$k_{AA} = \frac{4EI}{L}$        $k_{AB} = \frac{2EI}{L}$        $\times \theta_A$   
 $k_{BA} = \frac{2EI}{L}$        $k_{BB} = \frac{4EI}{L}$        $\times \theta_B$

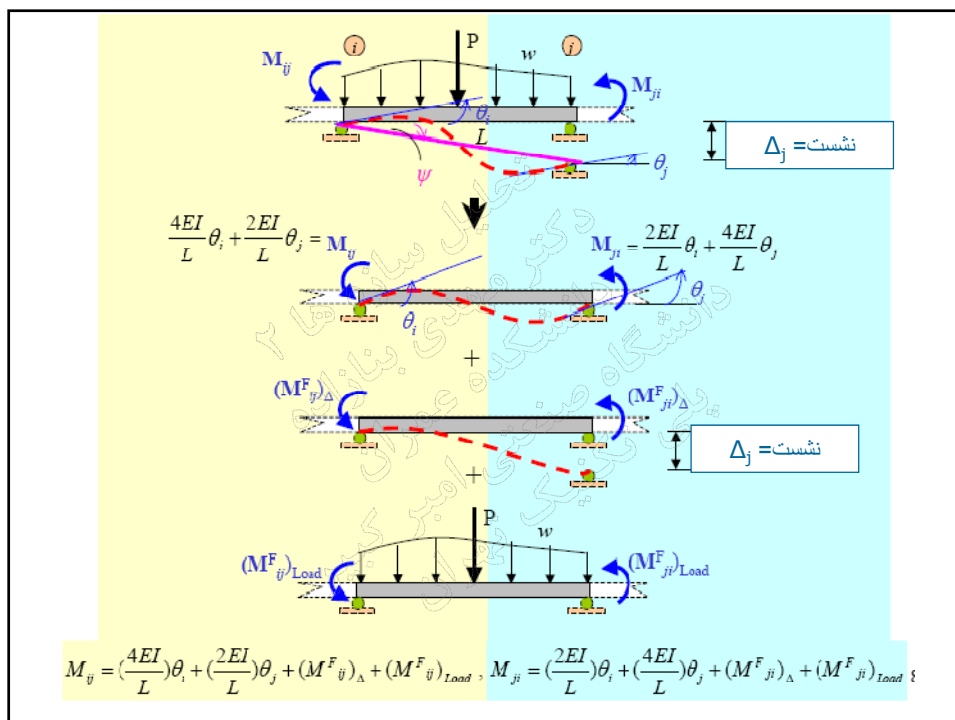
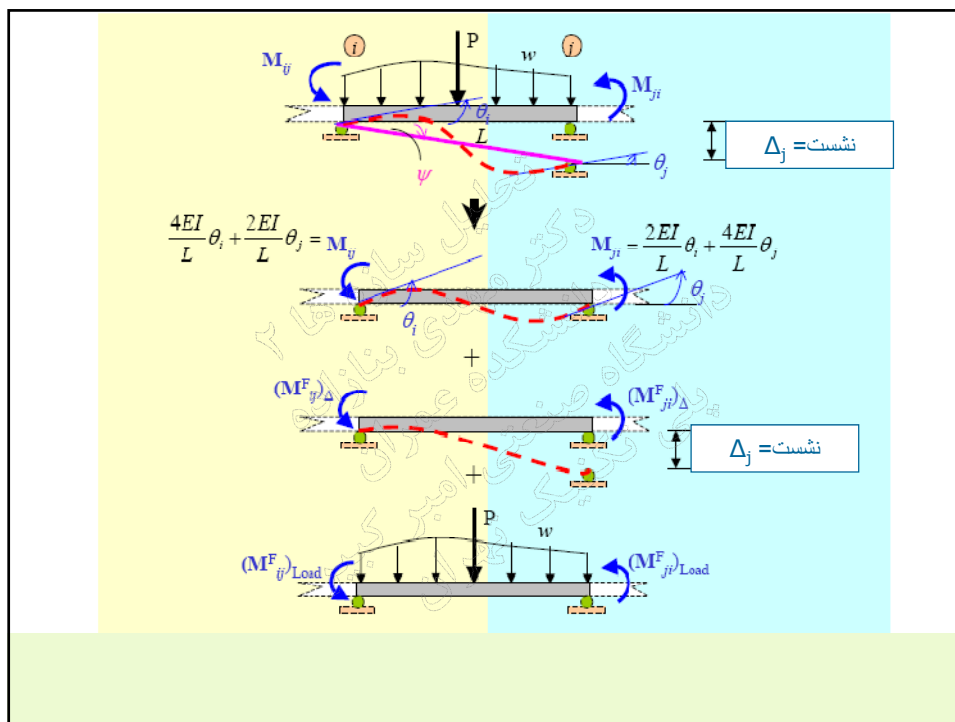
دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر مهدی بنژاده

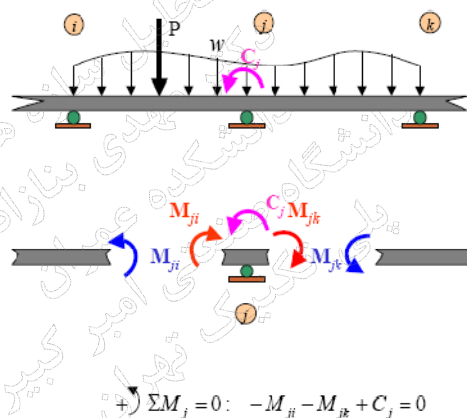
تحلیل سازه ها ۲



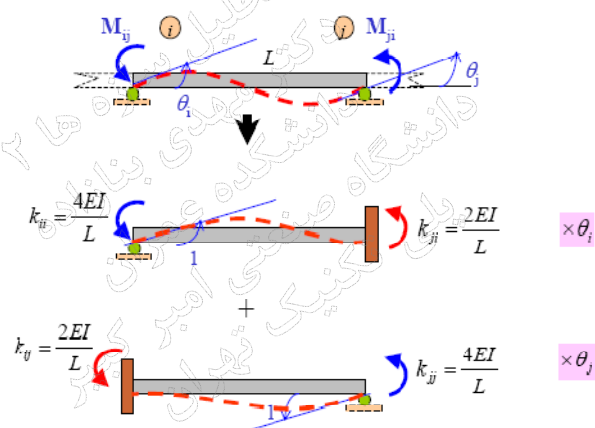




## تعداد



لنگر مقاوم خمشی ناشی از چرخش گره ها  $M_{ij}$   
این نیرو ناشی از میزان سختی موجود در گره هاست  
= چرخش  $\times$  ضرایب سختی



### فرمول بندی ماتریسی

$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ji}^F)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی یک تیر



### معادلات شیب افت

لنگر مقاوم داخلی در گره i

=

لنگر ناشی از چرخش گره i

+

لنگر ناشی از چرخش گره j

+

لنگر ناشی از بار گذاری روی المان فیکس شده

$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ji}^F)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$

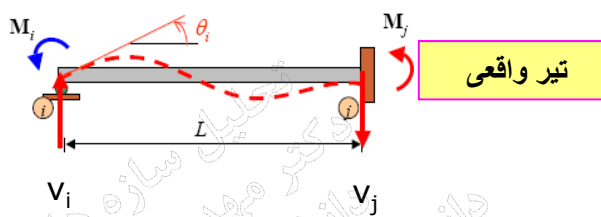
$[M] = [K][\theta] + [FEM]$   
 $([M] - [FEM]) = [K][\theta]$   
 $[\theta] = [K]^{-1}([M] - [FEM])$

ماتریس نیروهای  
 گیرداری  
 ماتریس سختی یک تیر  
 ماتریس تغییر مکانهای سازه

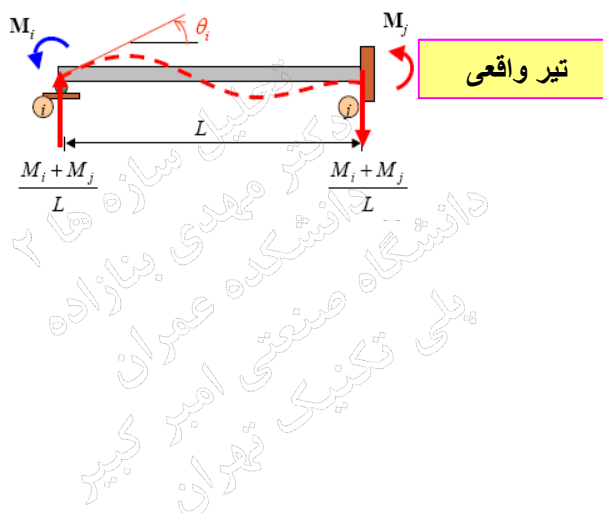
$[D] = [K]^{-1}([Q] - [FEM])$

ماتریس نیروهای  
 اعمالی با سازه

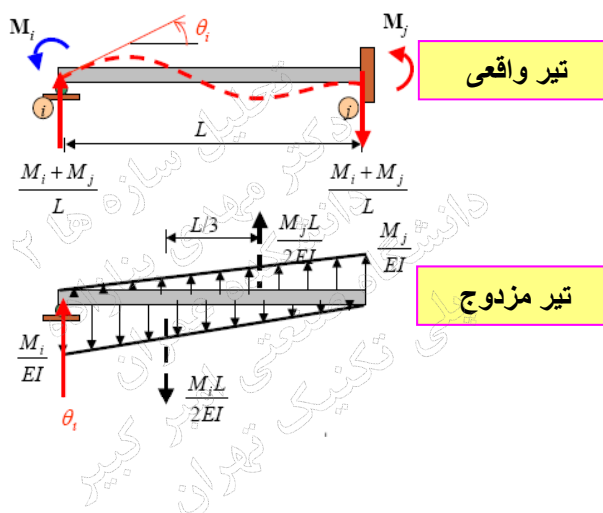
بدست آوردن لنگر مقاوم داخلی ناشی از چرخش گره i با فرض فیکس بودن j



بدست آوردن لنگر مقاوم داخلی ناشی از چرخش گره  $i$  با فرض فیکس بودن  $j$

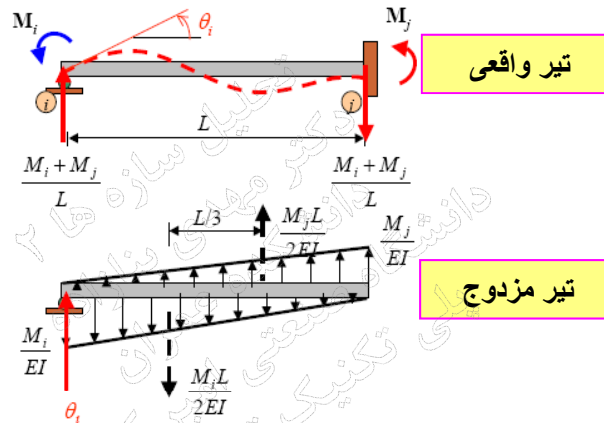


بدست آوردن لنگر مقاوم داخلی ناشی از چرخش گره  $i$  با فرض فیکس بودن  $j$





بدست آوردن لنگر مقاوم داخلی ناشی از چرخش گره i با فرض فیکس بودن j



$$+\circlearrowleft \Sigma M'_i = 0: -\left(\frac{M_i L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + \left(\frac{M_j L}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

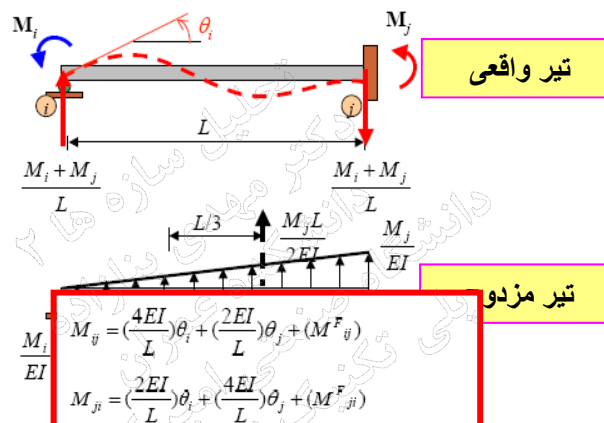
$$M_i = 2M_j \quad \text{--- (1)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \theta_i - \left(\frac{M_i L}{2EI}\right) + \left(\frac{M_j L}{2EI}\right) = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$M_i = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i$$

$$M_j = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i$$

بدست آوردن لنگر مقاوم داخلی ناشی از چرخش گره i با فرض فیکس بودن j



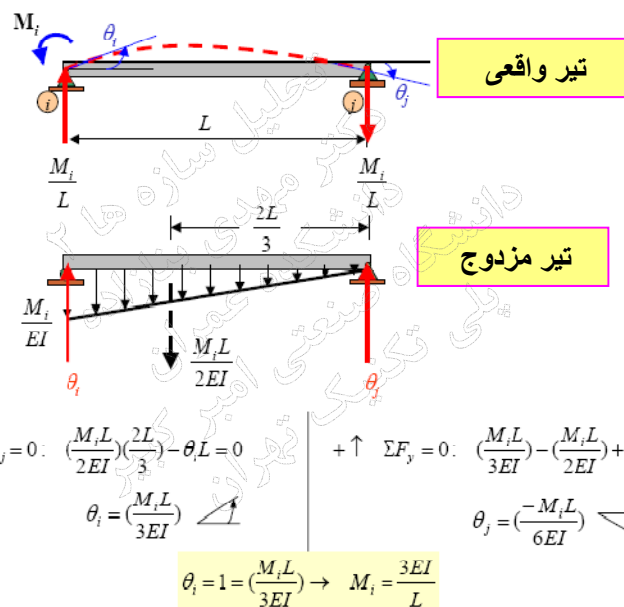
$$+\circlearrowleft \Sigma M'_i = 0: -\left(\frac{M_i L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + \left(\frac{M_j L}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \theta_i - \left(\frac{M_i L}{2EI}\right) + \left(\frac{M_j L}{2EI}\right) = 0 \quad \text{--- (2)}$$

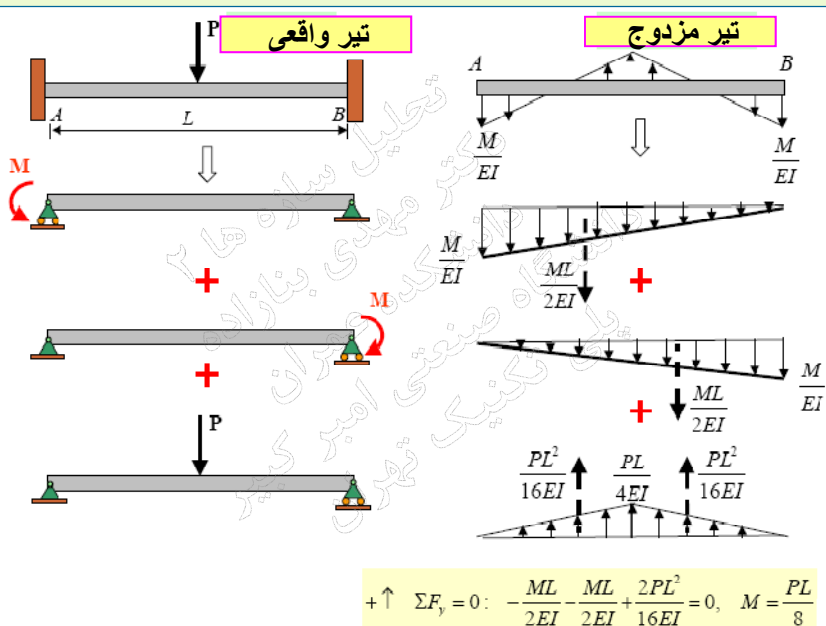
$$M_i = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i$$

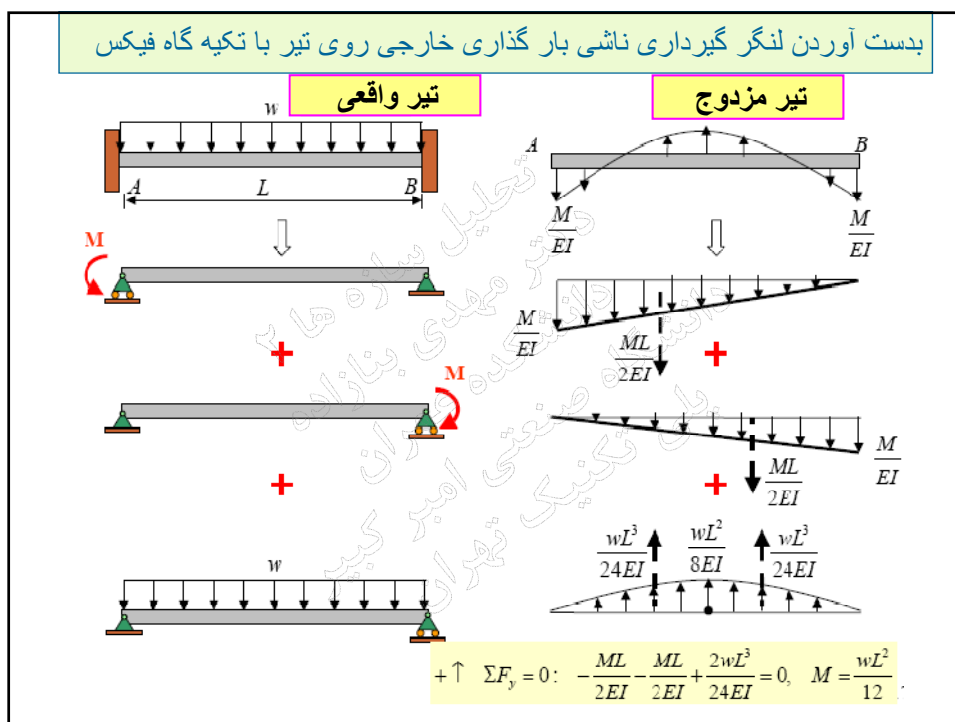
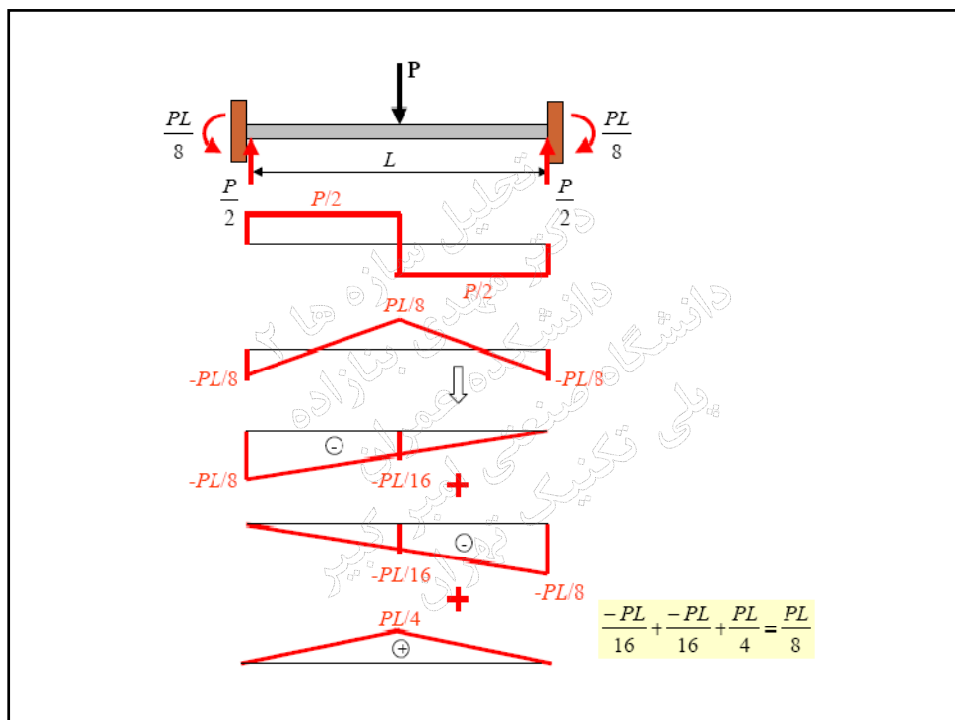
$$M_j = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i$$

بدست آوردن لنگر مقاوم داخلی ناشی از چرخش گره i با فرض مفصل بودن j

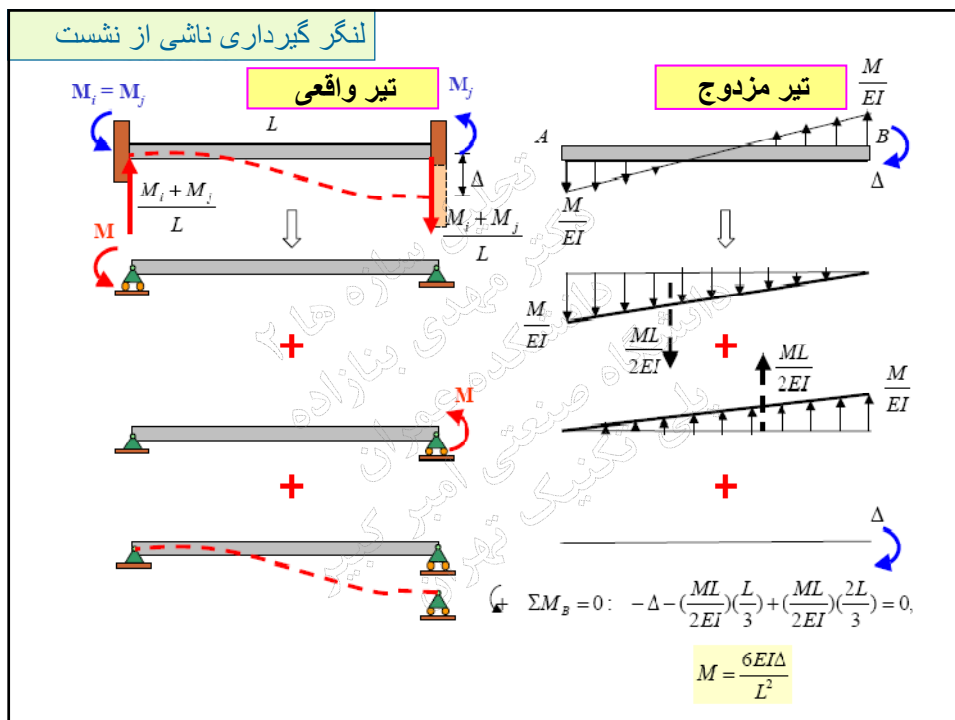


بدست آوردن لنگر گیرداری ناشی بار گذاری خارجی روی تیر با تکیه گاه فیکس

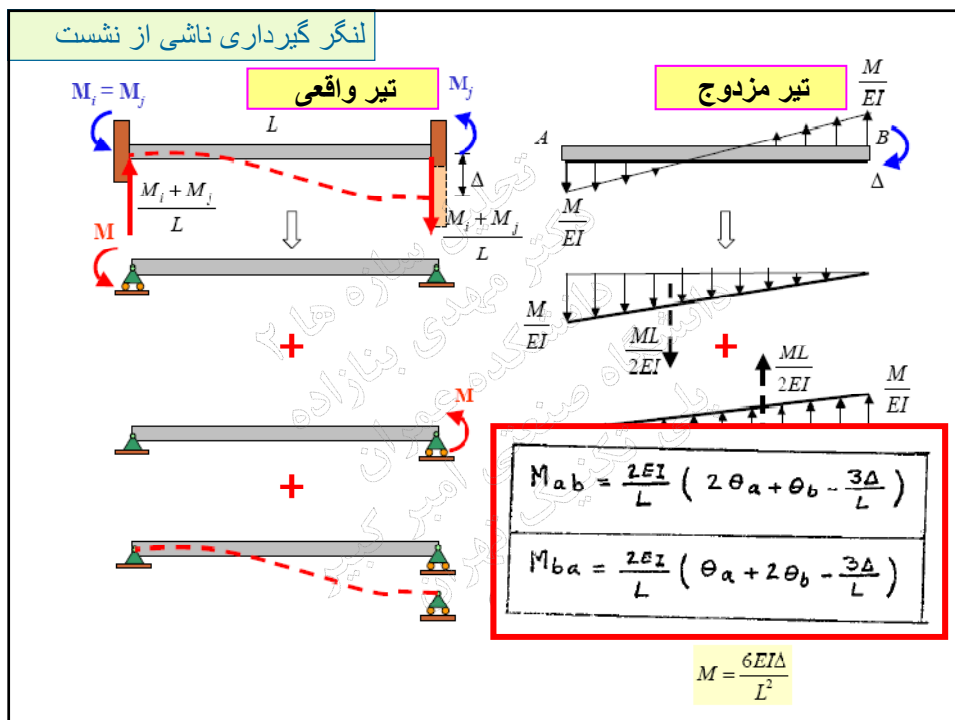




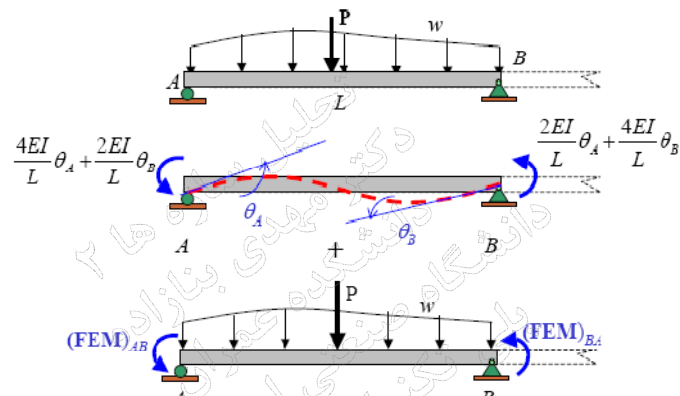
لنگر گیرداری ناشی از نشست



لنگر گیرداری ناشی از نشست



معادلات شیب افت اصلاح شده (وقتی یکی از دو تکه گاه مفصلی است)



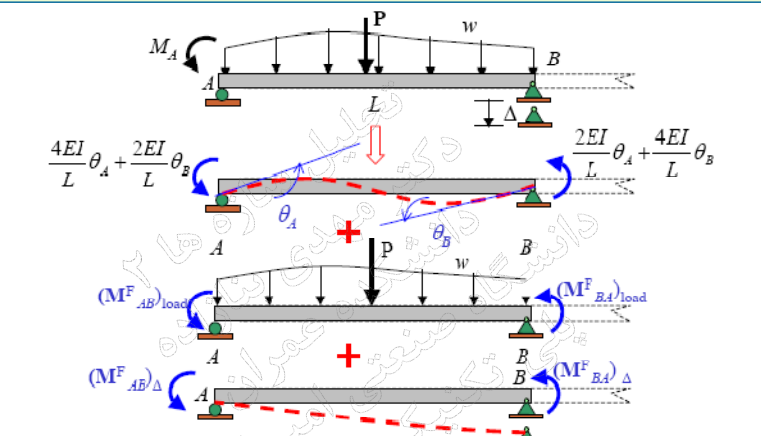
$$M_{AB} = 0 = \frac{4EI}{L}\theta_A + \frac{2EI}{L}\theta_B + (FEM)_{AB} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = 0 = \frac{2EI}{L}\theta_A + \frac{4EI}{L}\theta_B + (FEM)_{BA} \quad \text{--- (2)}$$

$$2(2) - (1): \quad 2M_{BA} = (6EI/L)\theta_B + 2(FEM)_{BA} - (FEM)_{AB}$$

$$M_{BA} = (3EI/L)\theta_B + (FEM)_{BA} - \frac{(FEM)_{AB}}{2}$$

معادلات شیب افت اصلاح شده (وقتی یکی از دو تکه گاه مفصلی است)

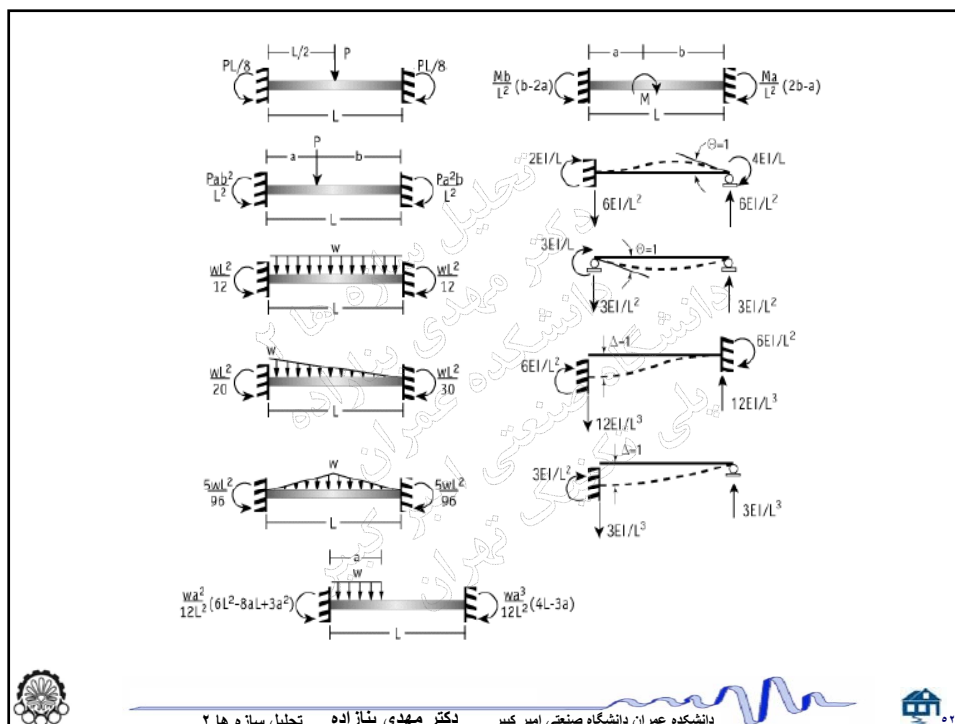
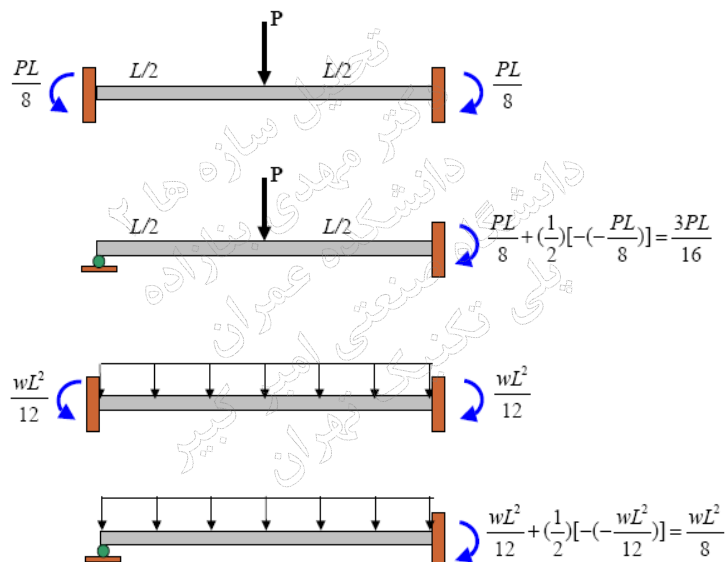


$$M_{AB} = M_A = \frac{4EI}{L}\theta_A + \frac{2EI}{L}\theta_B + (M_{AB}^F)_{load} + (M_{AB}^F)_{\Delta} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\theta_A + \frac{4EI}{L}\theta_B + (M_{BA}^F)_{load} + (M_{BA}^F)_{\Delta} \quad \text{--- (2)}$$

$$\theta_A \text{ حذف} \rightarrow \frac{2(2)-(1)}{2}: \quad M_{BA} = \frac{3EI}{L}\theta_B + [(M_{BA}^F)_{load} - \frac{1}{2}(M_{AB}^F)_{load}] + \frac{1}{2}(M_{BA}^F)_{\Delta} + \frac{M_A}{2}$$

## لنگرهای گیرداری (Fixed End Moment)



## مراحل حل یک سازه قابی شکل به روش شیب افت

۱. تشخیص تعداد درجات آزادی آزاد مستقل تغییر مکانی (مجهولات در روش سختی)
  ۲. تفکیک سازه به المانهای مجزا
  ۳. نوشتن معادلات شیب افت برای هر کدام از اعضاء (نیروهای مقاوم داخلی=نیروی ناشی از چرخش+نیروی ناشی از بارگذاری المان)
  ۴. استفاده از شرایط خاص به منظور سهولت در حل مساله (شیب افت اصلاح شده- استفاده از تقارن مستقیم یا معکوس)
  ۵. تشخیص و تشکیل معادلات تعادل (روش سختی) به تعداد مجهولات
  ۶. حل دستگاه معادلات به منظور بدست آوردن مجهولات تغییر مکانی
- تبصره: در صورت نیاز به حل هندسی در قدم اول میبایست حل هندسی صورت گیرد



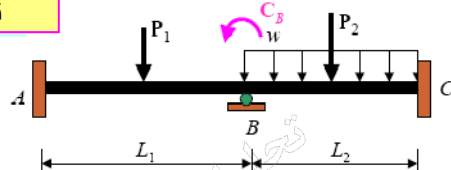
## حل یک مساله نمونه کلی تیر

۱. تشخیص تعداد درجات آزادی آزاد مستقل تغییر مکانی (مجهولات در روش سختی)

دکتر مهدی بنزاده  
دانشکده عمران  
پلی تکنیک صنعتی امیرکبیر  
تهران



## تیر نمونه



کل درجات آزادی با فرض عدم تغییر شکلهای محوری = ۶

درجات آزادی آزاد = ۱

تعداد مجهولات تغییر مکانی = ۱

$\theta_B$



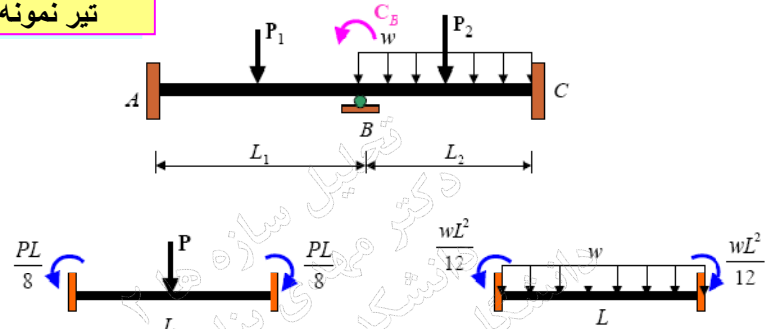
## حل یک مساله نمونه کلی تیر

۱. تشخیص تعداد درجات آزادی آزاد مستقل تغییر مکانی (مجهولات در روش سختی)
۲. تفکیک سازه به المانهای مجزا





## تیر نمونه

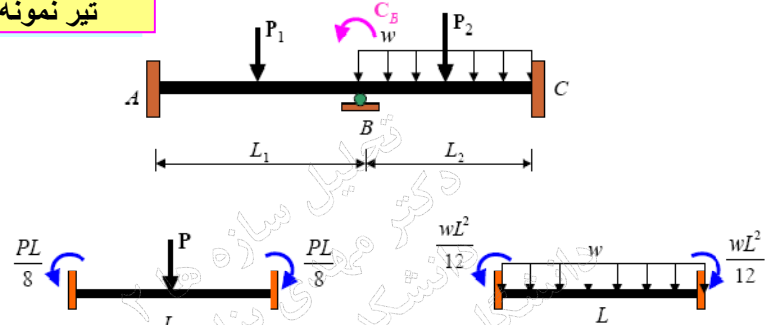


## حل یک مساله نمونه کلی تیر

۱. تشخیص تعداد درجات آزادی آزاد مستقل تغییر مکانی (مجهولات در روش سختی)
۲. تفکیک سازه به المانهای مجزا
۳. نوشتن معادلات شیب افت برای هرکدام از اعضاء (نیروهای مقاوم داخلی=نیروی ناشی از چرخش+نیروی ناشی از یارگذاری المان)



## تیر نمونه



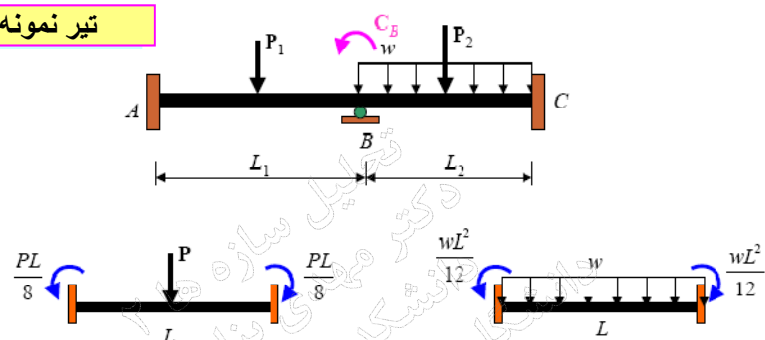
$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ji}^F)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$



## تیر نمونه



$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ji}^F)$$

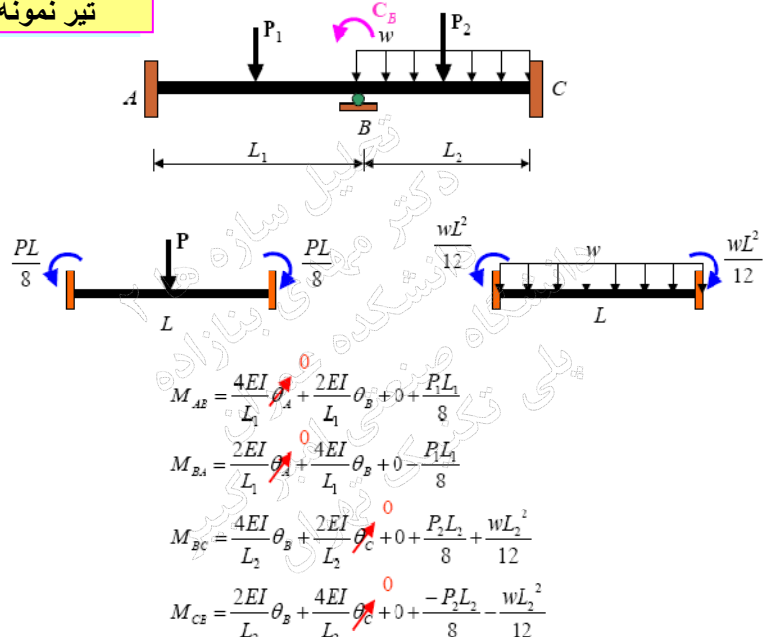
$$M_{ab} = \frac{2EI}{L} \left( 2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L} \right) + M_{ab}^F$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \left( 2\theta_b + \theta_a - \frac{3\Delta}{L} \right) + M_{ba}^F$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$



## تیر نمونه



دانشکده عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها ۲

## حل یک مساله نمونه کلی تیر

۱. تشخیص تعداد درجات آزادی آزاد مستقل تغییر مکانی (مجهولات در روش سختی)
۲. تفکیک سازه به المانهای مجزا
۳. نوشتن معادلات شیب افت برای هرکدام از اعضا (نیروهای مقاوم داخلی = نیروی ناشی از چرخش + نیروی ناشی از بارگذاری المان)
۴. استفاده از شرایط خاص به منظور سهولت در حل مساله (شیب افت اصلاح شده - استفاده از تقارن مستقیم یا معکوس)
۵. تشخیص و تشکیل معادلات تعادل (روش سختی) به تعداد مجهولات
۶. حل دستگاه معادلات به منظور بدست آوردن مجهولات تغییر مکانی

دانشکده عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها ۲

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_1} \theta_A + \frac{4EI}{L_1} \theta_B + 0 - \frac{P_1 L_1}{8}$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{L_2} \theta_B + \frac{2EI}{L_2} \theta_C + 0 + \frac{P_2 L_2}{8} + \frac{w L_2^2}{12}$$

$\sum M_B = 0: C_B - M_{BA} - M_{BC} = 0 \rightarrow$  حل برای  $\theta_B$

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها ۲

در معادلات شیب افت المانهای این تیر فقط  $\theta_B$  مجهول است

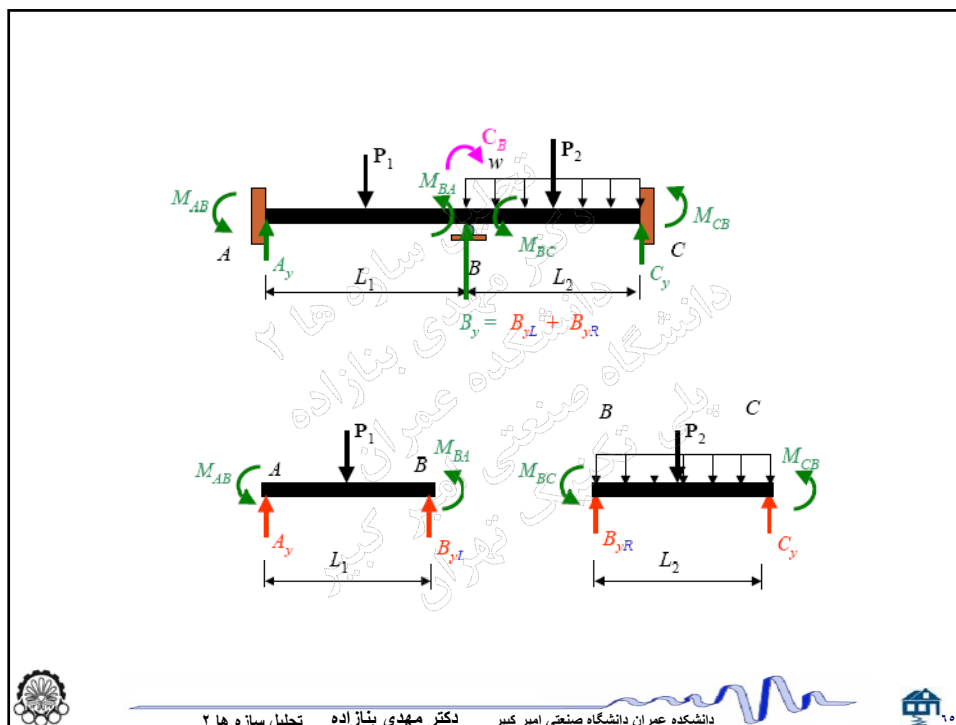
$$M_{AB} = \frac{4EI}{L_1} \cancel{\theta_A} + \frac{2EI}{L_1} \theta_B + 0 + \frac{P_1 L_1}{8}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_1} \cancel{\theta_A} + \frac{4EI}{L_1} \theta_B + 0 - \frac{P_1 L_1}{8}$$

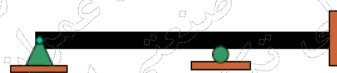
$$M_{BC} = \frac{4EI}{L_2} \theta_B + \frac{2EI}{L_2} \cancel{\theta_C} + 0 + \frac{P_2 L_2}{8} + \frac{w L_2^2}{12}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L_2} \theta_B + \frac{4EI}{L_2} \cancel{\theta_C} + 0 - \frac{P_2 L_2}{8} - \frac{w L_2^2}{12}$$

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها ۲

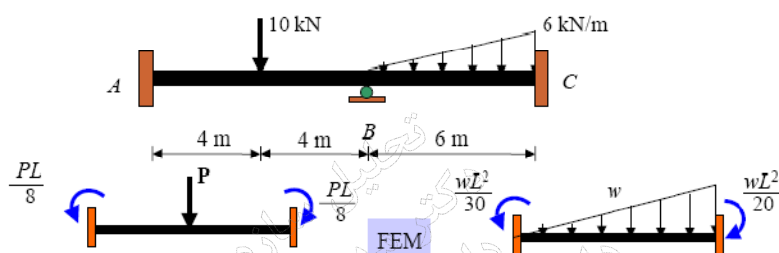
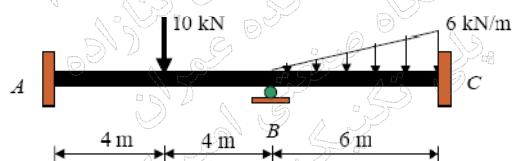


## مثال های تیر



## مثال ۱

مطلوبست دیاگرام نیروی برشی و خمشی برای تیر ذیل با  $EI$  ثابت.



معادلات شیب افست

$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M^F_{ij})$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M^F_{ji})$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^F_{ij} \\ M^F_{ji} \end{bmatrix}$$

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها ۲

معادلات شیب افست

$$M_{AB} = \frac{4EI}{8}\theta_A + \frac{2EI}{8}\theta_B + \frac{(10)(8)}{8}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{8}\theta_A + \frac{4EI}{8}\theta_B - \frac{(10)(8)}{8}$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{6}\theta_B + \frac{2EI}{6}\theta_C + \frac{(6)(6^2)}{30}$$

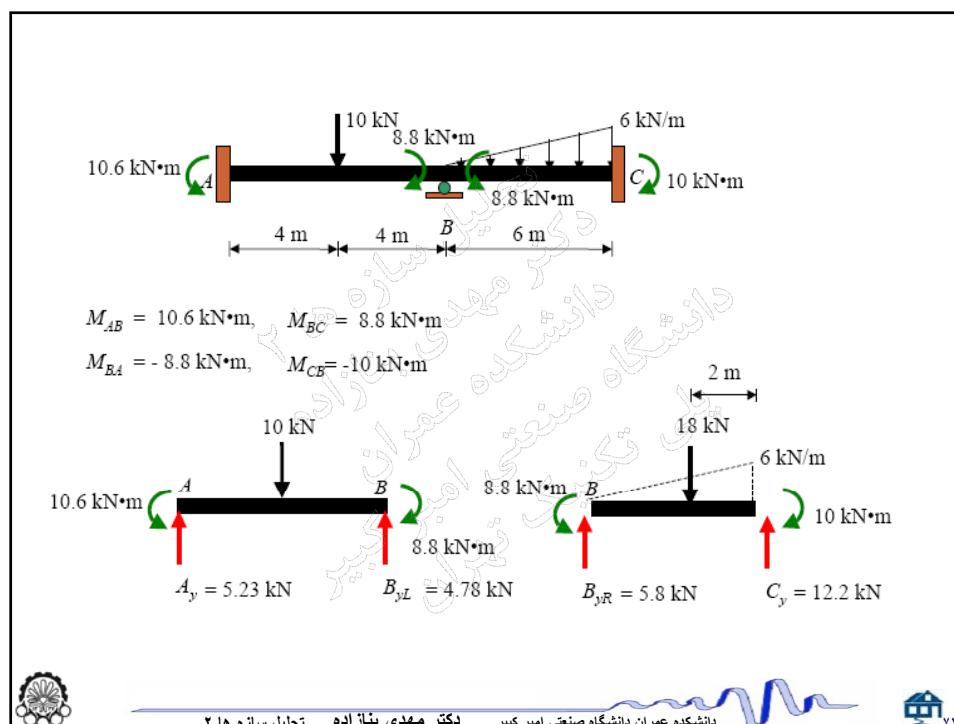
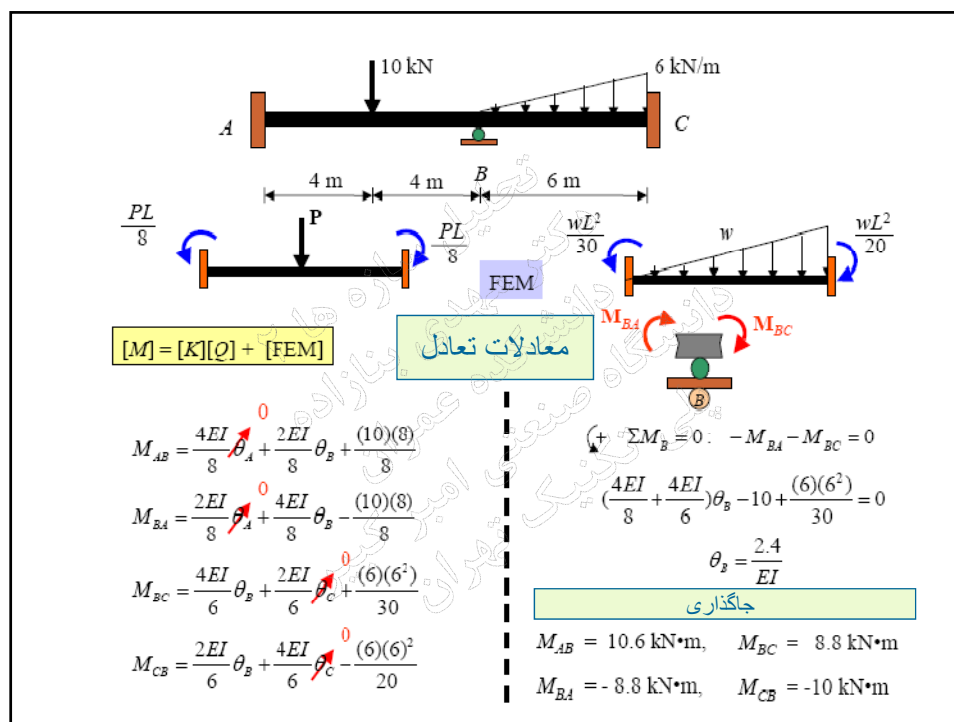
$$M_{CB} = \frac{2EI}{6}\theta_B + \frac{4EI}{6}\theta_C - \frac{(6)(6^2)}{30}$$

$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M^F_{ij})$$

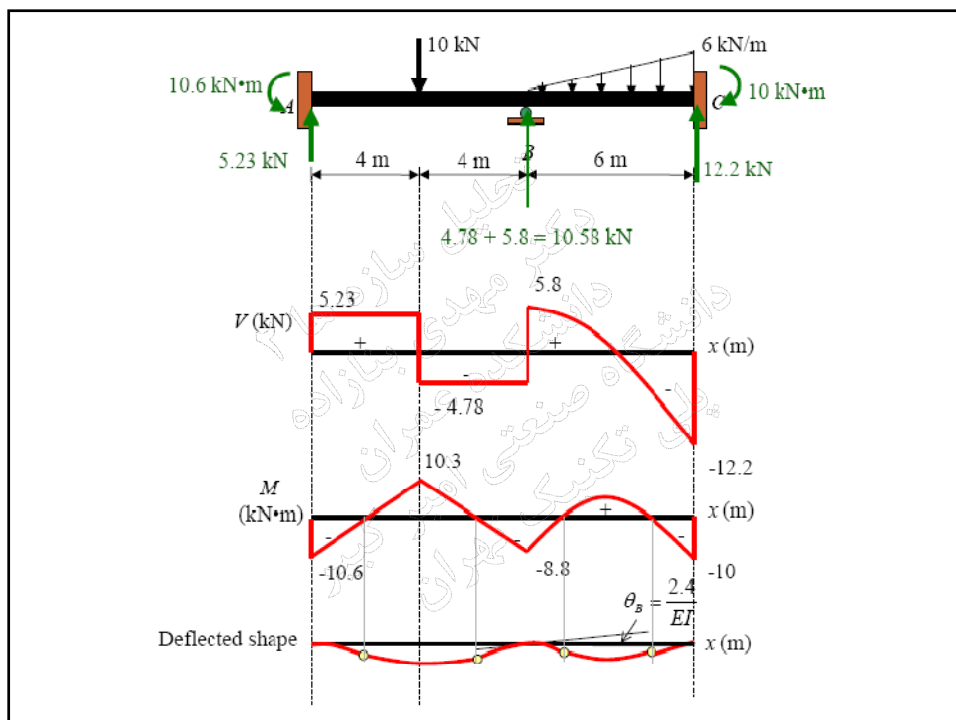
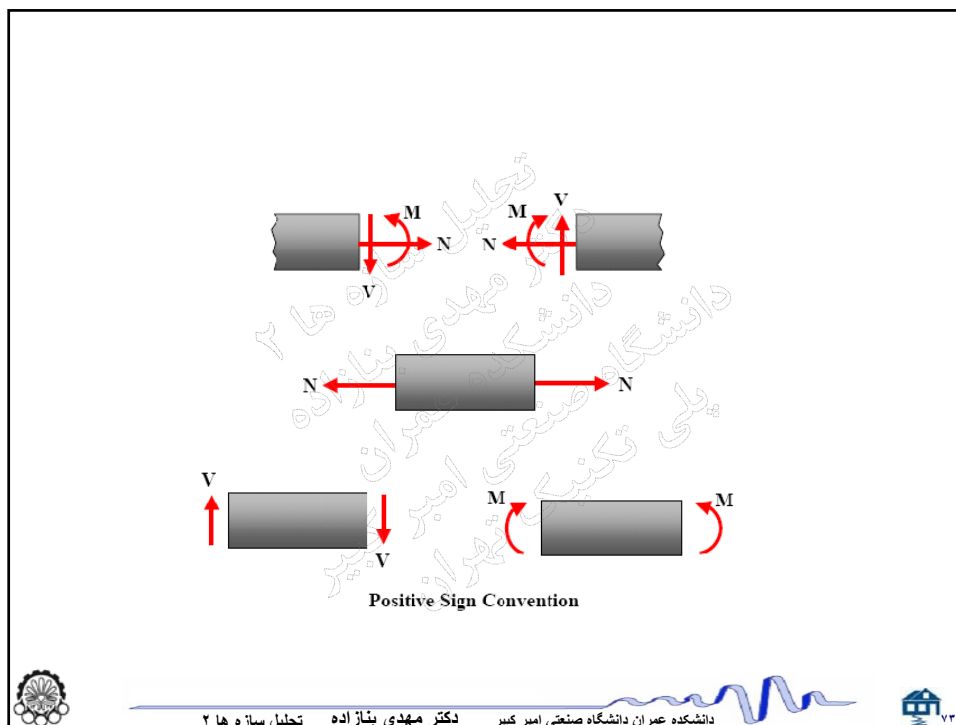
$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M^F_{ji})$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^F_{ij} \\ M^F_{ji} \end{bmatrix}$$

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها ۲

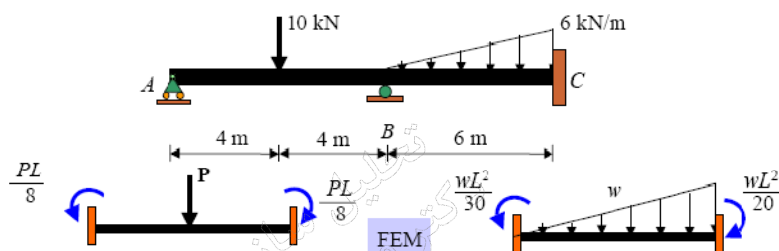
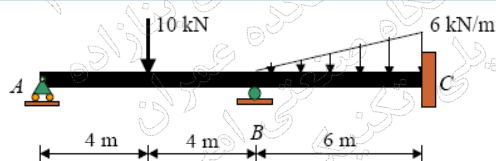






## مثال ۲

مطلوبست دیاگرام نیروی برشی و خمشی برای تیر ذیل با EI ثابت.



$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ji}^F)$$

معادلات شیب افت

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$



$[M] = [K][Q] + [FEM]$

$$M_{AB} = \frac{4EI}{8}\theta_A + \frac{2EI}{8}\theta_B + \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{8}\theta_A + \frac{4EI}{8}\theta_B - \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (2)}$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{6}\theta_B + \frac{2EI}{6}\theta_C + \frac{(6)(6^2)}{30} \quad \text{--- (3)}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{6}\theta_B + \frac{4EI}{6}\theta_C - \frac{(6)(6)^2}{20} \quad \text{--- (4)}$$

معادلات شیب افت

$$2(2)-(1): 2M_{BA} = \frac{6EI}{8}\theta_B - 30$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{8}\theta_B - 15 \quad \text{--- (5)}$$

$[M] = [K][Q] + [FEM]$

$$M_{AB} = \frac{4EI}{8}\theta_A + \frac{2EI}{8}\theta_B + \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{8}\theta_A + \frac{4EI}{8}\theta_B - \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (2)}$$

$$M_{BC} = \frac{4EI}{6}\theta_B + \frac{2EI}{6}\theta_C + \frac{(6)(6^2)}{30} \quad \text{--- (3)}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{6}\theta_B + \frac{4EI}{6}\theta_C - \frac{(6)(6)^2}{20} \quad \text{--- (4)}$$

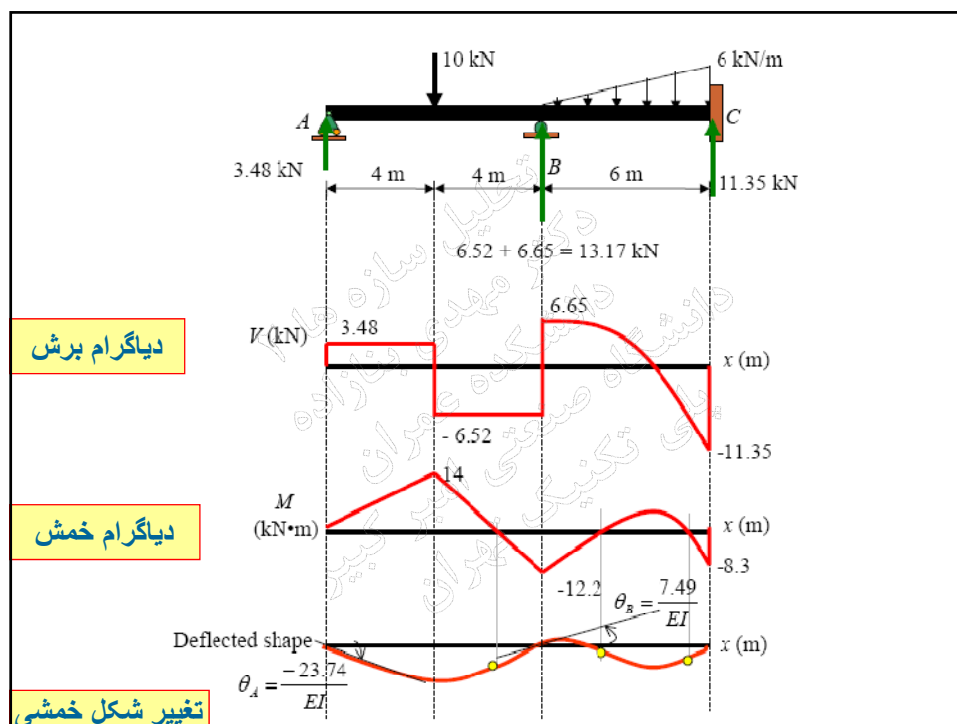
معادلات شیب افت

$$2(2)-(1): 2M_{BA} = \frac{6EI}{8}\theta_B - 30$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{8}\theta_B - 15 \quad \text{--- (5)}$$

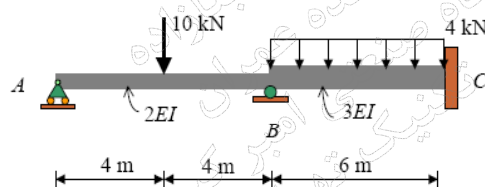
$$M_{BA} = \frac{3EI}{L}\theta_B + [(M_{BA}^F)_{load} - \frac{1}{2}(M_{AB}^F)_{load}] + \frac{1}{2}(M_{BA}^F)_{\Delta} + \frac{M_A}{2}$$

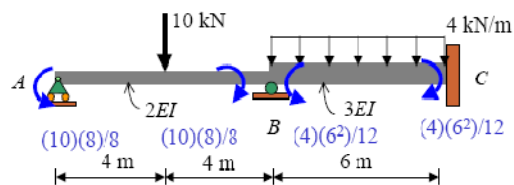




### مثال 3

مطلوبست دیاگرام نیروی برشی و خمشی برای تیر ذیل با EI ثابت.



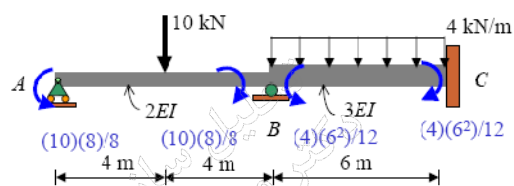


$$M_{ij} = \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_i + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_j + (M_{ji}^F)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$

$$M_{BA} = -\frac{3EI}{L}\theta_B + [(M_{BA}^F)_{load} - \frac{1}{2}(M_{AB}^F)_{load}] + \frac{1}{2}(M_{BA}^F)_\Delta + \frac{M_A}{2}$$



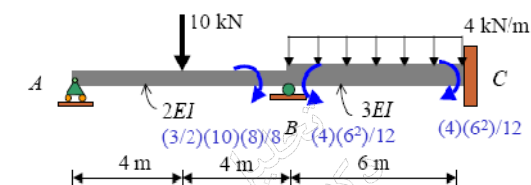
معادلات شیب افت

$$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{8}\theta_A + \frac{2(2EI)}{8}\theta_B + \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{8}\theta_A + \frac{4(2EI)}{8}\theta_B - \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{2(2)-(1)}{2} : M_{BA} = \frac{3(2EI)}{8}\theta_B - \frac{(3/2)(10)(8)}{8} \quad \text{--- (2a)}$$

$$M_{BC} = \frac{4(3EI)}{6}\theta_B + \frac{(4)(6^2)}{12} \quad \text{--- (3)}$$



$$M_{BA} = \frac{3(2EI)}{8} \theta_B - \frac{(3/2)(10)(8)}{8} \quad (2a)$$

$$M_{BC} = \frac{4(3EI)}{6} \theta_B + \frac{(4)(6^2)}{12} \quad (3)$$

$$-M_{BA} - M_{BC} = 0 : 2.75EI\theta_B = -12 + 15 = 3$$

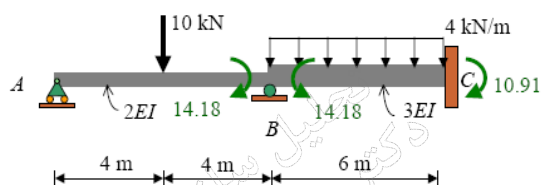
$$\theta_B = 1.091/EI$$

معادلات تعادل

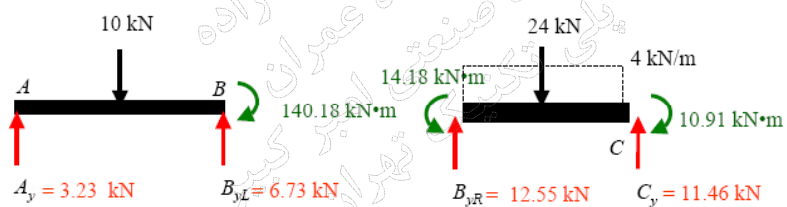
$$M_{BA} = \frac{3(2EI)}{8} \left( \frac{1.091}{EI} \right) - 15 = -14.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

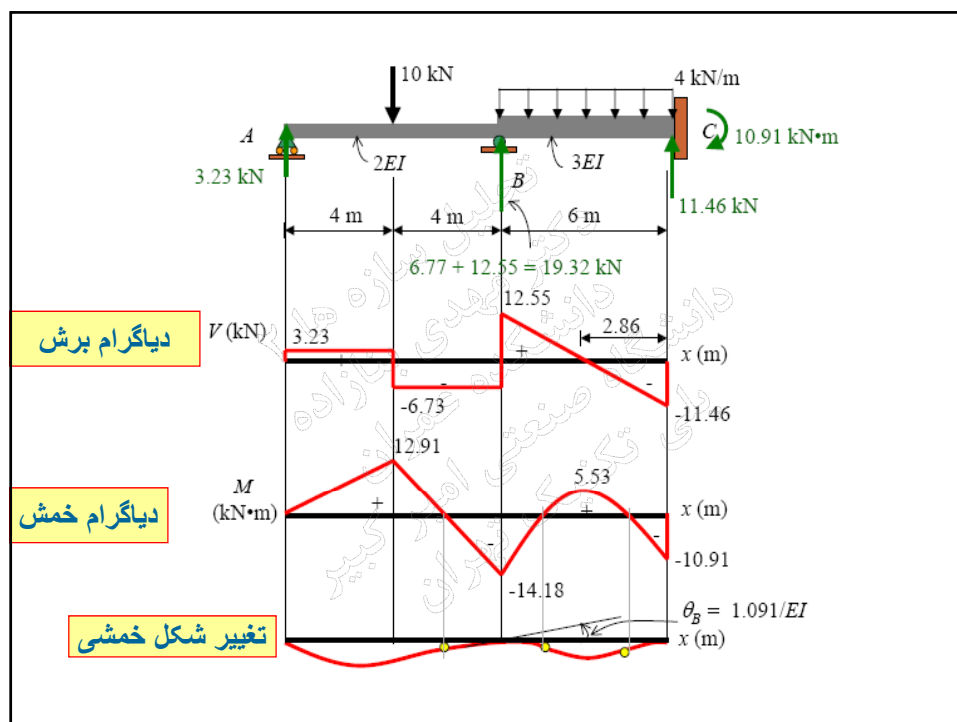
$$M_{BC} = \frac{4(3EI)}{6} \left( \frac{1.091}{EI} \right) - 12 = 14.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = \frac{2(3EI)}{6} \theta_B - 12 = -10.91 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



$$M_{BA} = -14.18 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_{BC} = 14.18 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_{CB} = -10.91 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

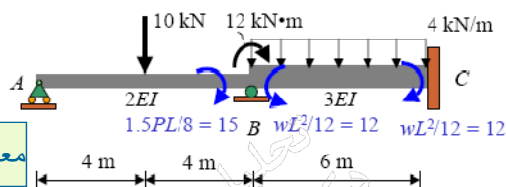
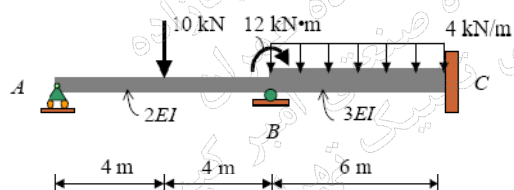






## مثال 4

مطلوبست دیاگرام نیروی برشی و خمشی برای تیر ذیل با  $EI$  ثابت.



معادلات شیب افت

$$M_{BA} = \frac{3(2EI)}{8} \theta_B - 15 \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BC} = \frac{4(3EI)}{6} \theta_B + 12 \quad \text{--- (2)}$$

$$M_{CB} = \frac{2(3EI)}{6} \theta_B - 12 \quad \text{--- (3)}$$

$$M_{ij} = \left( \frac{4EI}{L} \right) \theta_i + \left( \frac{2EI}{L} \right) \theta_j + (M_{ij}^F)$$

$$M_{ji} = \left( \frac{2EI}{L} \right) \theta_i + \left( \frac{4EI}{L} \right) \theta_j + (M_{ji}^F)$$

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4EI/L) & (2EI/L) \\ (2EI/L) & (4EI/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix}$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{L} \theta_B + [(M_{BA}^F)_{load}] - \frac{1}{2} (M_{AB}^F)_{load} + \frac{1}{2} (M_{BA}^F)_{\Delta} + \frac{M_A}{2}$$



معادلات شیب افت

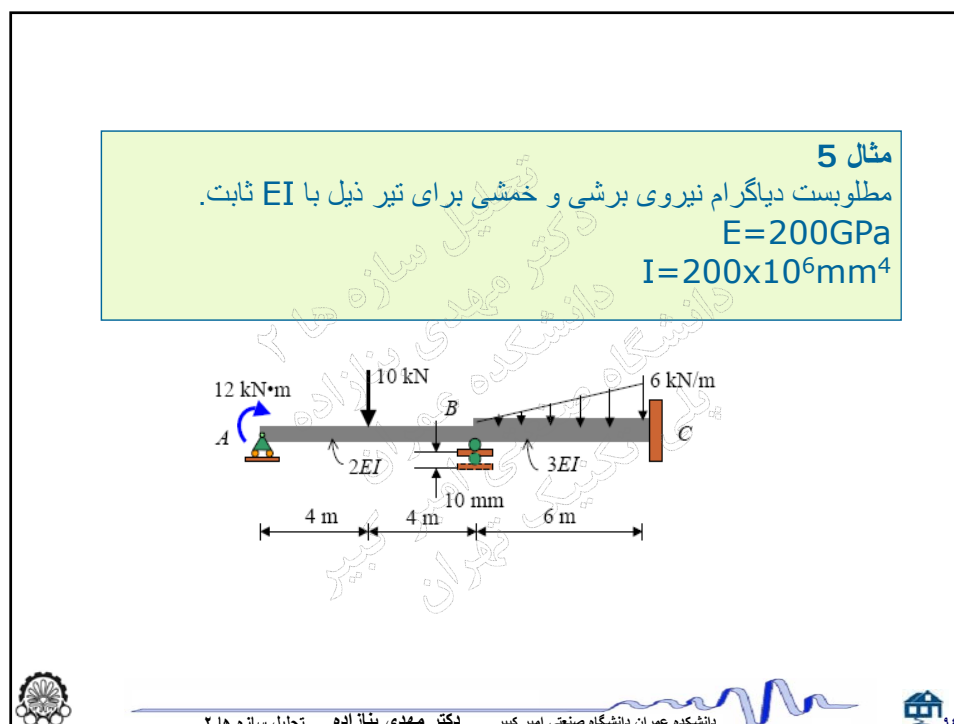
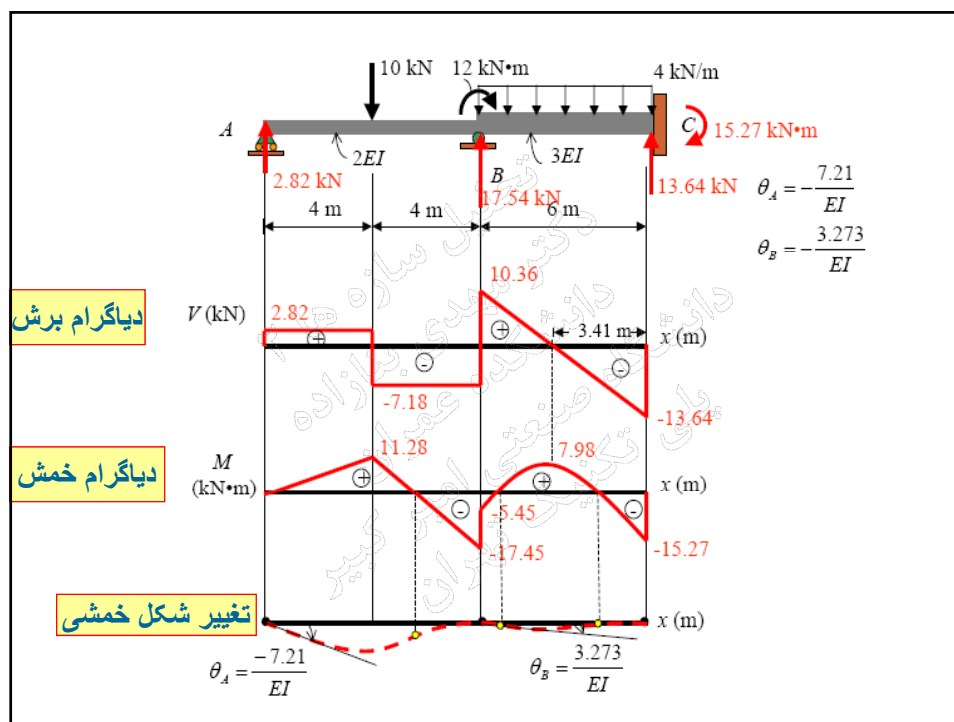
$M_{2A} = \frac{3(2EI)}{8} \theta_B - 15 \quad \text{--- (1)}$   
 $M_{2C} = \frac{4(3EI)}{6} \theta_B + 12 \quad \text{--- (2)}$   
 $M_{2B} = \frac{2(3EI)}{6} \theta_B - 12 \quad \text{--- (3)}$

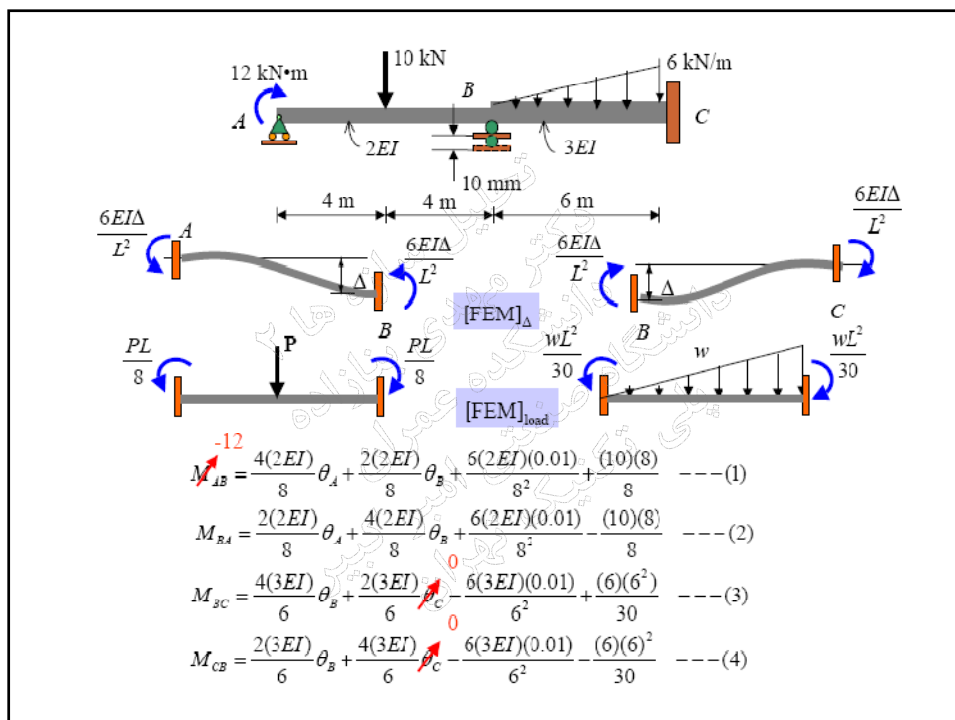
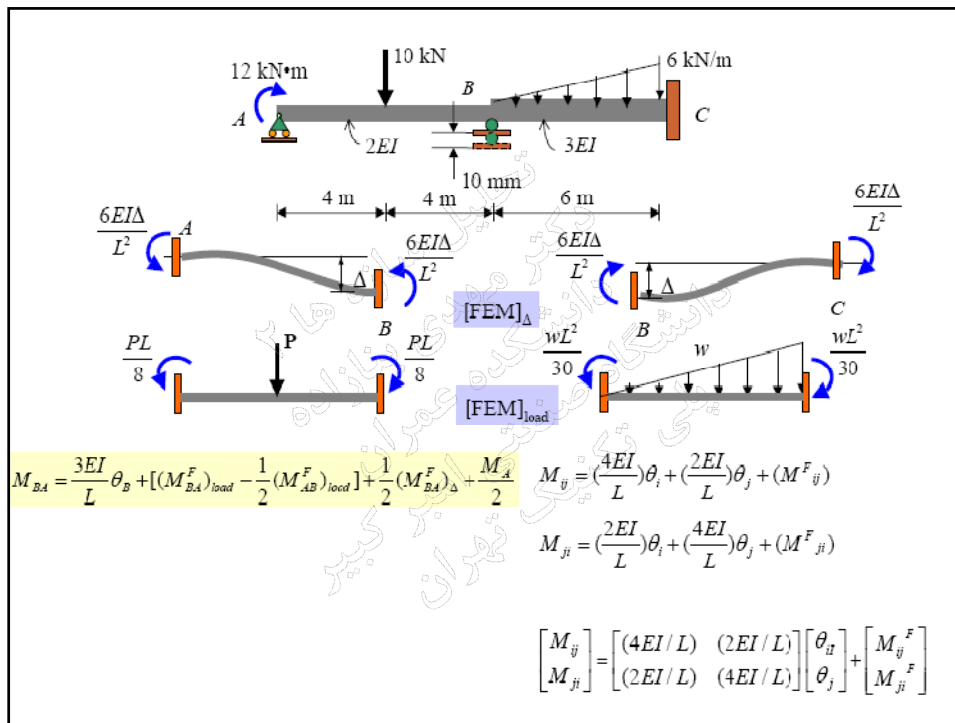
معادلات تعادل

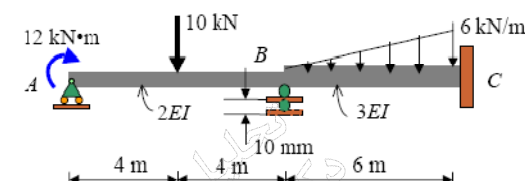
$\text{Joint B: } -M_{BA} - M_{BC} - 12 = 0$   
 $-(0.75EI - 15) - (2EI\theta_B + 12) - 12 = 0$   
 $\theta_B = -\frac{3.273}{EI}$

$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{8} \theta_A + \frac{2(3EI)}{8} \theta_B + \frac{(10)(8)}{8}$   
 $\theta_A = -\frac{7.21}{EI}$   
 $M_{BA} = 0.75EI \left(-\frac{3.273}{EI}\right) - 15 = -17.45 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 $M_{BC} = 2EI \left(-\frac{3.273}{EI}\right) + 12 = 5.45 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 $M_{CB} = EI \left(-\frac{3.273}{EI}\right) - 12 = -15.27 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{BA} = 0.75EI \left(-\frac{3.273}{EI}\right) - 15 = -17.45 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 $M_{BC} = 2EI \left(-\frac{3.273}{EI}\right) + 12 = 5.45 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 $M_{CB} = EI \left(-\frac{3.273}{EI}\right) - 12 = -15.27 \text{ kN} \cdot \text{m}$







$$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{8}\theta_A + \frac{2(2EI)}{8}\theta_B + \frac{6(2EI)(0.01)}{8^2} + \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{8}\theta_A + \frac{4(2EI)}{8}\theta_B + \frac{5(2EI)(0.01)}{8^2} - \frac{(10)(8)}{8} \quad \text{--- (2)}$$

$$EI = (200 \times 10^6 \text{ kPa})(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4) = 200 \times 200 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 :$$

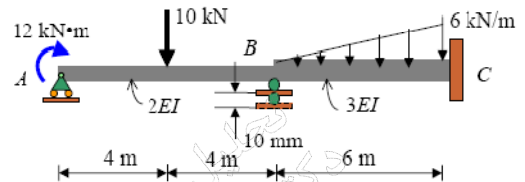
$$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{8}\theta_A + \frac{2(2EI)}{8}\theta_B + 75 + 10 \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{8}\theta_A + \frac{4(2EI)}{8}\theta_B + 75 - 10 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{2(2)-(1)}{2} : M_{BA} = \frac{3(2EI)}{8}\theta_B + 75 - (75/2) - 10 - (10/2) - 12/2 \quad \text{--- (2a)}$$

۲۹

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها



معادلات تعادل

$$M_{BA} = (3/4)(2EI)\theta_B + 16.5$$

$$M_{BC} = (4/6)(3EI)\theta_B - 192.8$$

$$\sum M_B = 0 : -M_{BA} - M_{BC} = 0 \quad (3/4 + 2)EI\theta_B - 16.5 - 192.8 = 0$$

$$\theta_B = 64.109/EI$$

$$\theta_A = -129.06/EI$$

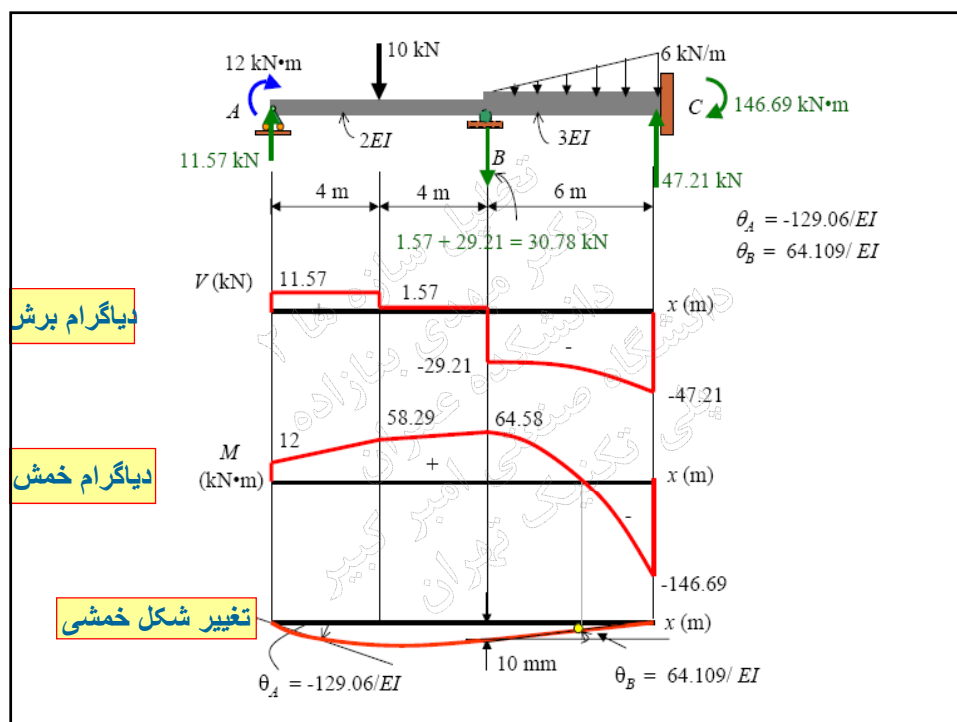
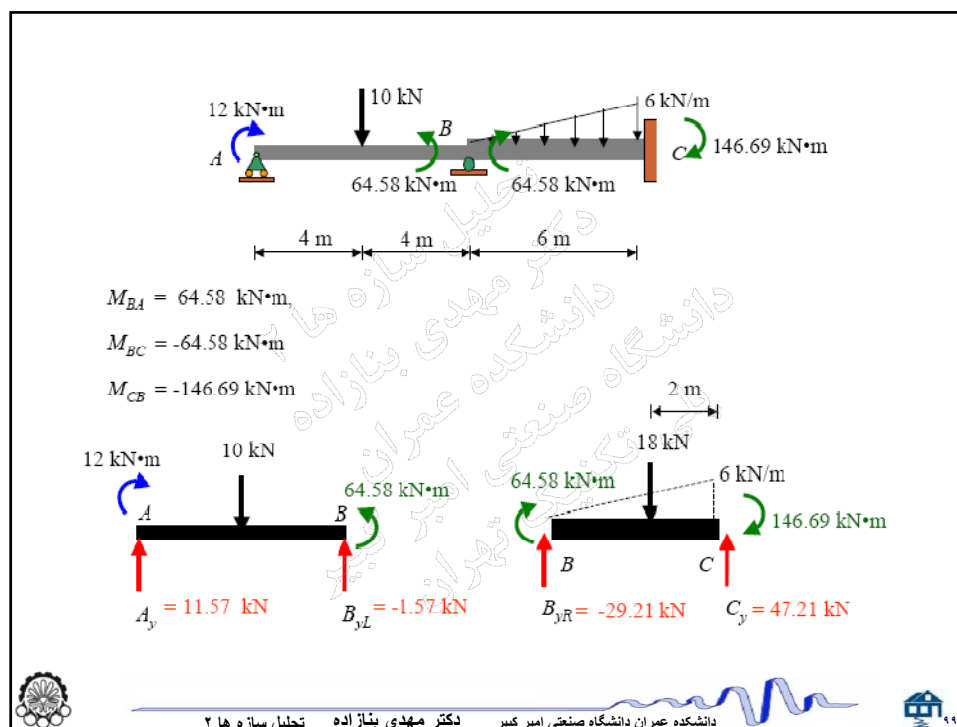
$$M_{BA} = 64.58 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -64.58 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = -146.69 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

۲۹

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنژاده تحلیل سازه ها

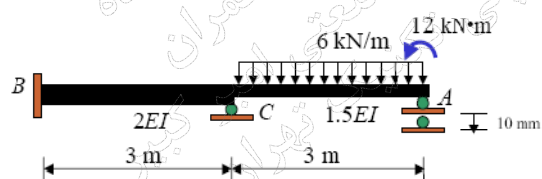


## مثال 6

مطلوبست دیاگرام نیروی برشی و خمشی برای تیر ذیل با  $EI$  ثابت.

$$E=200\text{GPa}$$

$$I=50\times 10^6\text{mm}^4$$



$$\frac{6(3^2)}{12} = 4.5$$

$$\frac{6(1.5 \times 200 \times 50)(0.01)}{3^2} = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = \frac{4(2EI)}{3} \theta_C \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{CA} = \frac{4(1.5EI)}{3} \theta_C + \frac{2(1.5EI)}{3} \theta_A + 4.5 + 100 \quad \text{--- (2)}$$

$$M_{AC} = \frac{2(1.5EI)}{3} \theta_C + \frac{4(1.5EI)}{3} \theta_A - 4.5 + 100 \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{2(2) - (2)}{2} : M_{CA} = \frac{3(1.5EI)}{3} \theta_C + \frac{3(4.5)}{2} + \frac{100}{2} + \frac{12}{2} \quad \text{--- (2a)}$$

Diagram of a continuous beam with two spans. The left span is 3 m long with a fixed support at B and a roller support at C. The right span is 3 m long with a roller support at C and a roller support at A. The beam has a constant EI stiffness. A uniformly distributed load of 6 kN/m is applied over the entire length. A concentrated moment of 12 kN·m is applied at support A. The deflection at A is 10 mm.

Equations for moments:

$$M_{CB} = \frac{4(2EI)}{3} \theta_c \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{CA} = \frac{3(1.5EI)}{3} \theta_c + \frac{3(4.5)}{2} + \frac{100}{2} + \frac{12}{2} \quad \text{--- (2a)}$$

معادلات تعادل

$$M_{CB} + M_{CA} = 0$$

$$\frac{(8 + 4.5)EI}{3} \theta_c + \frac{3(4.5)}{2} + \frac{100}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$$\theta_c = \frac{-15.06}{EI} = -0.0015 \text{ rad}$$

جاذب‌اری

$$12 = \frac{2(1.5EI)}{3} \left( \frac{-15.06}{EI} \right) + \frac{4(1.5EI)}{3} \theta_A - 4.5 + 100 \quad \text{--- (3)}$$

$$\theta_A = \frac{-34.22}{EI} = -0.0034 \text{ rad}$$

Diagram of the same continuous beam as above, showing the final internal forces. At support B, there is a reaction of 20.08 kN (up) and a moment of 20.08 kN·m (counter-clockwise). At support C, there is a reaction of 20.08 kN (up) and a moment of 40.16 kN·m (clockwise). At support A, there is a reaction of 8.39 kN (down) and a moment of 12 kN·m (clockwise). The diagram shows the beam with supports, loads, and dimensions.

Equations for moments:

$$\theta_c = \frac{-15.06}{EI} = -0.0015 \text{ rad} \quad \theta_A = \frac{-34.22}{EI} = -0.0034 \text{ rad}$$

$$M_{BC} = \frac{2(2EI)}{3} \theta_c = \frac{2(2EI)}{3} \left( \frac{-15.06}{EI} \right) = -20.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = \frac{4(2EI)}{3} \theta_c = \frac{4(2EI)}{3} \left( \frac{-15.06}{EI} \right) = -40.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

20.08 kN·m

20.08 kN

40.16 kN·m

20.08 kN

40.16 kN·m

18 kN

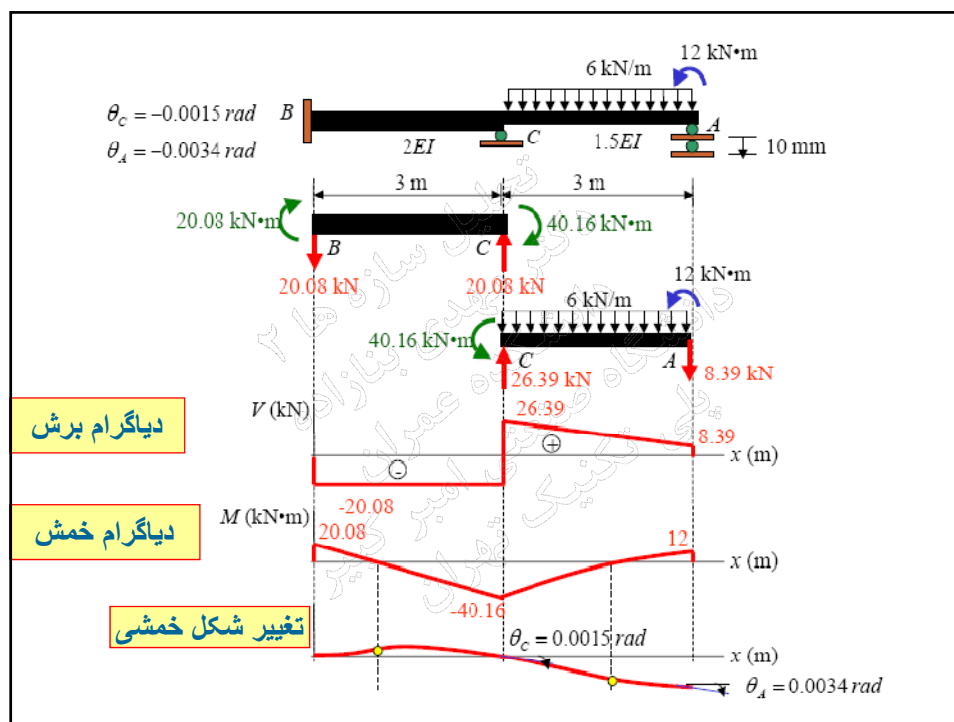
6 kN/m

12 kN·m

26.39 kN

8.39 kN





**مثال 7**  
 مطلوبست دیاگرام نیروی برشی و خمشی برای تیر ذیل با EI ثابت.  
 $E = 200 \text{ GPa}$   
 $I = 50 \times 10^6 \text{ mm}^4$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
 دکتر مهدی بنزاده  
 تحلیل سازه ها ۲

Diagram of a continuous beam with two spans. The left span is 3m long with a fixed support at B and a roller support at C. The right span is 3m long with a roller support at C and a roller support at A. The beam has a constant EI for the first 3m and 1.5EI for the next 3m. A uniformly distributed load of 6 kN/m is applied over the entire length. A concentrated moment of 12 kN·m is applied at support A. The vertical displacement at C is  $\Delta_c$ . The diagram shows the beam deflection, the equivalent nodal loads at C, and the equations for the moments at B, C, and A.

$$\frac{6(2EI)\Delta_c}{3^2} = \frac{4EI\Delta_c}{3}$$

$$\frac{6(1.5EI)\Delta_c}{3^2} = EI\Delta_c$$

$$M_{BC} = \frac{2(2EI)}{3}\theta_c - \frac{4EI}{3}\Delta_c \quad \text{--- (1)}$$

$$M_{CB} = \frac{4(2EI)}{3}\theta_c - \frac{4EI}{3}\Delta_c \quad \text{--- (2)}$$

$$M_{CA} = \frac{4(1.5EI)}{3}\theta_c + \frac{2(1.5EI)}{3}\theta_A + EI\Delta_c + 4.5 + 100 \quad \text{--- (3)}$$

$$M_{AC} = \frac{2(1.5EI)}{3}\theta_c + \frac{4(1.5EI)}{3}\theta_A + EI\Delta_c - 4.5 + 100 \quad \text{--- (4)}$$

$$\frac{2(3) - (4)}{2} : M_{CA} = \frac{3(1.5EI)}{3}\theta_c + \frac{EI}{2}\Delta_c + \frac{3(4.5)}{2} + \frac{100}{2} + \frac{12}{2} \quad \text{--- (3a)}$$

Diagram of the same continuous beam, showing the free-body diagrams for each span and the equilibrium equations. The left span is shown with moments  $M_{BC}$  and  $M_{CB}$  at C, and reaction  $B_y$  at B. The right span is shown with moments  $M_{CA}$  and  $M_{AC}$  at C, and reaction  $A_y$  at A. The equilibrium equations for the entire beam are derived, including the sum of moments and the sum of vertical forces at support C.

معادلات تعادل

$$(C_y)_{CB} = -\frac{(M_{BC} + M_{CB})}{3}$$

$$(C_y)_{CA} = \frac{M_{CA} + 12 + 18(1.5)}{3} = \frac{M_{CA} + 39}{3}$$

$$\sum M_C = 0 : M_{CB} + M_{CA} = 0 \quad \text{--- (1*)}$$

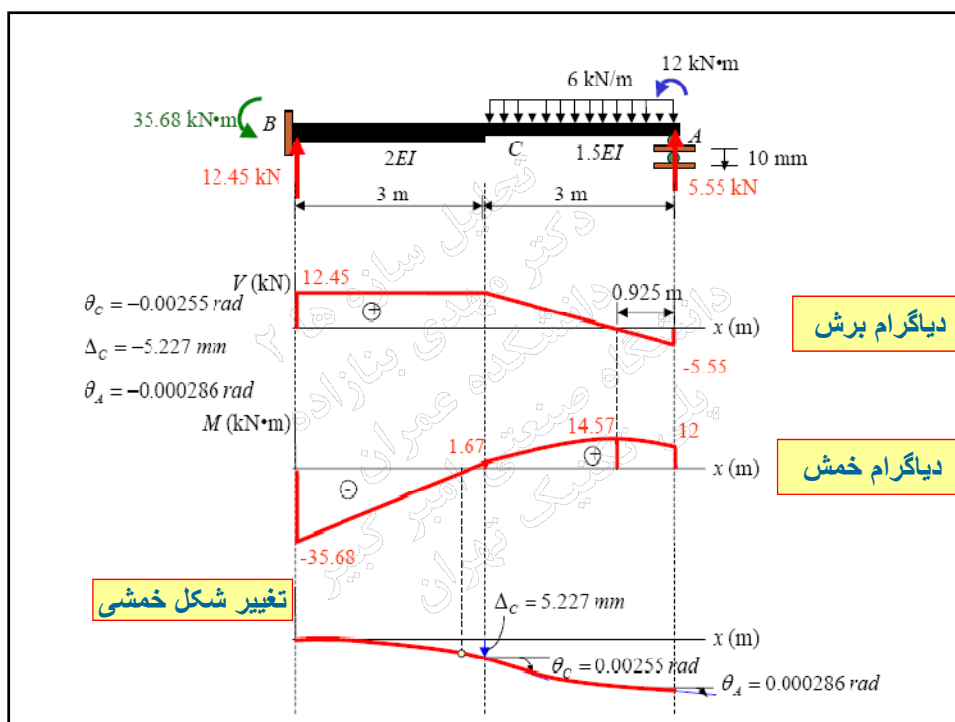
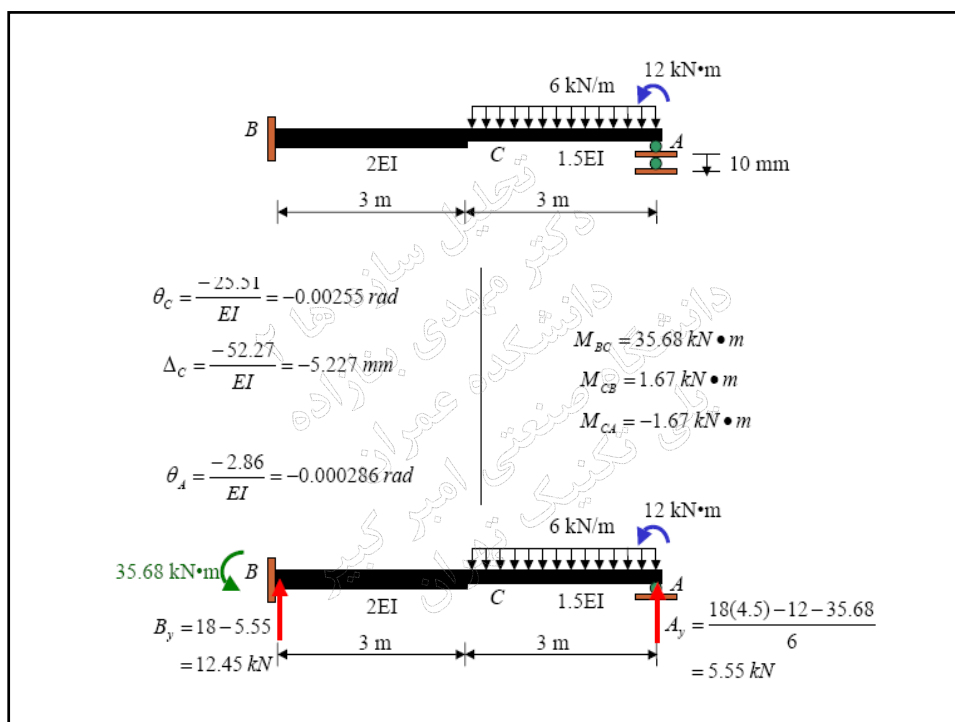
$$\sum C_y = 0 : (C_y)_{CB} + (C_y)_{CA} = 0 \quad \text{--- (2*)}$$

جاگذاری

$$4.167EI\theta_c - 0.8333EI\Delta_c = -62.15 \quad \text{--- (5)}$$

$$-2.5EI\theta_c + 3.167EI\Delta_c = -101.75 \quad \text{--- (6)}$$

$$\theta_c = -25.51/EI = -0.00255 \text{ rad} \quad \Delta_c = -52.27/EI = -5.227 \text{ mm}$$

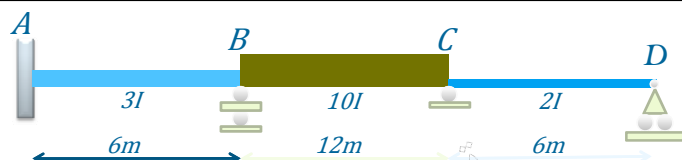


مثال: تیر سراسری ذیل را به روش شیب افت تحلیل کنید.



$$EI = 3000 \text{ t.m}^2$$

$$\Delta_B = 15 \times 10^{-3} \text{ m}$$



$$\frac{EI\Delta_B}{2}$$

$$\frac{6(3EI)\Delta_B}{6^2} = \frac{EI\Delta_B}{2}$$

$$\frac{5EI\Delta_B}{12}$$

$$\frac{6(10EI)\Delta_B}{12^2} = \frac{5EI\Delta_B}{12}$$

$$M_{AB} = \frac{2(3EI)}{6} \theta_B + \frac{EI \Delta_B}{2} \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{4(3EI)}{6} \theta_B + \frac{EI \Delta_B}{2} \quad (2)$$

$$M_{BC} = \frac{4(10EI)}{12} \theta_B + \frac{2(10EI)}{12} \theta_C - \frac{5EI \Delta_B}{12} \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{4(10EI)}{12} \theta_C + \frac{2(10EI)}{12} \theta_B - \frac{5EI \Delta_B}{12} \quad (4)$$

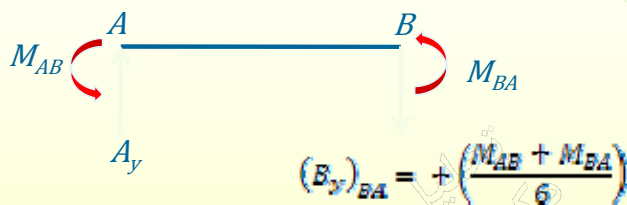
$$M_{CD} = \frac{4(2EI)}{6} \theta_C + \frac{2(2EI)}{6} \theta_D \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{4(2EI)}{6} \theta_D + \frac{2(2EI)}{6} \theta_C \quad (6)$$

$$M_{DC} = 0 \rightarrow \theta_C = -2\theta_D \quad (1^*)$$

$$\sum M_C = 0 : M_{CD} + M_{CB} = 0 \quad (2^*)$$

$$\sum M_B = 0 : M_{BC} + M_{BA} = 0 \quad (3^*)$$



$$(B_y)_{BA} = + \left( \frac{M_{AB} + M_{BA}}{6} \right)$$



$$(B_y)_{BC} = \left( \frac{M_{CB} + M_{BC}}{12} \right)$$



$$D_y = \left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{6} \right)$$

جابر گندار

فرمان

$$4.333EI\theta_C + 1.667EI\theta_B - \frac{5EI}{12}(15 \times 10^{-3}) = 0$$

$$5.333EI\theta_B + 1.667EI\theta_C + \frac{EI}{12}(15 \times 10^{-3}) = 0$$

$\theta_C = 0.00174 \text{ rad} ; \theta_B = -0.00076 \text{ rad}$

$$\begin{cases} M_{BC} = -17.82 \text{ ton.m} \\ M_{CB} = -5.25 \text{ ton.m} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{AB} = 20.16 \text{ ton.m} \\ M_{BA} = 17.82 \text{ ton.m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{CD} = 5.22 \text{ ton.m} \\ M_{DC} = 0 \end{cases}$$

دانشگاه عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر دکتر مهدی بنزاده تحلیل سازه ۱۵

