

# راهنمای حل محاسبات عددی

Industrial Engineering &  
Management

[www.industrialem.blogspot.com](http://www.industrialem.blogspot.com)



مؤلفین:

دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

دکتر محمدتقی درویشی

عضو هیئت علمی دانشگاه رازی  
(گروه ریاضی)



[WWW.NAYABPROJECTS.COM](http://WWW.NAYABPROJECTS.COM)

# فصل سوم

## درونیایی و برونیایی

۱- هرگاه  $x_0, x_1, \dots, x_n$  نقاط درونیایی و  $f_0, f_1, \dots, f_n$  مقادیر تابع  $f(x)$  در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چندجمله‌ای  $P(x)$ ، حداکثر از درجه  $n$ ، وجود دارد به طوری که:

$$P(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

حل: فرض کنیم  $P(x)$  و  $Q(x)$  دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $n$  باشند به طوری که

$$P(x_i) = Q(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (*)$$

قرار می‌دهیم  $h(x) = P(x) - Q(x)$  لذا  $h(x)$  یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $n$  است که با توجه به رابطه  $(*)$  داریم

$$h(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

یعنی  $x_i$ ها برای  $i = 0, 1, \dots, n$  ریشه‌های چندجمله‌ای  $h(x)$  می‌باشند. بنابراین چندجمله‌ای حداکثر از درجه  $n$  دارای  $n+1$  ریشه (متمایز) است که امکان ندارد مگر

$$h(x) \equiv 0$$

و از آن  $P(x) = Q(x)$  یعنی چندجمله‌ای درونیاب  $f$  در نقاط  $x_i$  منحصر به فرد است. لازم به ذکر است که اثبات وجود چندجمله‌ای درونیاب ضروری است، برای این منظور فرض کنید

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

یک چندجمله‌ای از درجه (حداکثر)  $n$  است، هرگاه  $a_0$  تا  $a_n$  را بتوانیم طوری به دست آوریم که  $P(x_i) = f_i$  در این صورت نشان داده‌ایم که یک چندجمله‌ای درونیاب برای تابع  $f$  وجود دارد. برای این

منظور کافی است یک دستگاه شامل  $n+1$  معادله برای تعیین  $n+1$  مجهول  $a_0$  تا  $a_n$  به دست آوریم. از این که می خواهیم  $P$  بر  $f$  در نقاط  $x_i$  منطبق باشد لذا  $P(x_i) = f_i$  برای  $i = 0, 1, \dots, n$  لذا

$$\begin{aligned} i=0 &: f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n \\ i=1 &: f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n \\ &\vdots \\ i=n &: f_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

دستگاه فوق جواب دارد یعنی  $a_0$  تا  $a_n$  را می توان تعیین نمود هرگاه دترمینان ضرایب دستگاه صفر نباشد یعنی هرگاه

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

دترمینان فوق به ترمینان واندرموند معروف است و اثبات می شود که مخالف صفر است. لذا  $a_0$  تا  $a_n$  قابل تعیین هستند یعنی یک چندجمله ای از درجه حداکثر  $n$  وجود دارد که در نقاط  $x_i$  بر  $f$  منطبق است. ۲- چندجمله ای های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

$x_i$	۰	۱	۲	۴
$f_i$	۳	۲	۷	۵۹

حل: می خواهیم چندجمله ای لاگرانژ  $L_0(x)$ ،  $L_1(x)$ ،  $L_2(x)$  و  $L_3(x)$  را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8} \end{aligned}$$

$$L_0(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{-4} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{24} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

۳- چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی مسأله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از  $f(3)$  به دست آورید.

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

حل:

$$P(x) = -\frac{3}{8}(x^2 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{2}{3}(x^2 - 6x^2 + 8x) - \frac{5}{4}(x^2 - 5x^2 + 4x) + \frac{59}{24}(x^2 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 3 \quad f(3) \simeq P(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 3 = 24$$

۴- برای تابع جدولی زیر تقریبی از  $f(0.6)$  به دست آورید.

$x_i$	0.4	0.5	0.7	0.8
$f_i$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

حل:  $n = 3$ ، ابتدا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ  $L_0(x)$ ،  $L_1(x)$ ،  $L_2(x)$  و  $L_3(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0.5)(x - 0.7)(x - 0.8)}{(0.4 - 0.5)(0.4 - 0.7)(0.4 - 0.8)}$$

$$= -0.012(x^2 - 2x^2 + 1.31x - 0.28)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.7)(x - 0.8)}{(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.7)(0.5 - 0.8)}$$

$$= 0.006(x^2 - 1.9x^2 + 1.16x - 0.224)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.8)}{(0.7 - 0.4)(0.7 - 0.5)(0.7 - 0.8)}$$

$$= -0.006(x^2 - 1.7x^2 + 0.92x - 0.16)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.7)}{(0.8 - 0.4)(0.8 - 0.5)(0.8 - 0.7)}$$

$$= 0.012(x^2 - 1.6x^2 + 0.83x - 0.14)$$

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

$$P(x) = -1.683583x^2 - 4.523999x^2 + 5.276054x - 2.410622$$

$$f(0.6) \simeq P(0.6) = -0.509975$$

۵- با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

$x_i$	۰	۱	۲	۴
$f_i$	۱	۱	۲	۵

حل:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x) - \frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x) + \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

۶- برای تابع جدولی مسأله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف.  $f[2, 4]$  ب.  $f[1, 2, 4]$  پ.  $f[0, 1, 2]$  ت.  $f[0, 1, 2, 4]$

حل:

الف)  $f[2, 4] = \frac{f_2 - f_4}{2 - 4} = \frac{2 - 5}{2 - 4} = \frac{3}{2}$

ب)  $f[1, 2, 4] = \frac{f[1, 2] - f[2, 4]}{1 - 4} = \frac{\frac{f_1 - f_2}{1 - 2} - \frac{f_2 - f_4}{2 - 4}}{1 - 4} = \frac{\frac{1 - 2}{1 - 2} - \frac{2}{-2}}{-3} = \frac{1}{6}$

پ)  $f[0, 1, 2] = \frac{f[0, 1] - f[1, 2]}{0 - 2} = \frac{\frac{f_0 - f_1}{0 - 1} - \frac{f_1 - f_2}{1 - 2}}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ت)  $f[0, 1, 2, 4] = \frac{f[0, 1, 2] - f[1, 2, 4]}{0 - 4} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4} = -\frac{1}{12}$

۷- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای‌های درونیاب توابع جدولی مسائل ۴،۲ و ۵ را به دست آورید.

حل: برای مسئله ۲ داریم

تفاضلات مرتبه

$x_i$	$f_i$	اول	دوم	سوم
۰	۳			
		-۱		
۱	۲		۳	
		۵		۱
۲	۷		۷	
		۲۶		
۴	۵۹			

$$P(x) = 3 - x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = x^3 - 2x + 3$$

چندجمله‌ای‌های مسائل ۴ و ۵ به طور مشابه به دست می‌آیند.

۸- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

$x_i$	-۱	۱	۲
$f_i$	-۳	۰	۴

حل:

$x_i$	$f_i$	اول	دوم
-۱	-۳		
		$\frac{3}{2}$	
۱	۰		$\frac{5}{6}$
		۴	
۲	۴		

$$P(x) = -3 + (x+1)\left(\frac{3}{2}\right) + (x+1)(x-1)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= -3 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}$$

$$P(x) = \frac{1}{6}(5x^2 + 9x - 14)$$

۹- به کمک فرمول‌های پیشرو و پسرو نیوتن تقریب‌هایی از  $f(2)$  و  $f(1/1)$  برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

$x_i$	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
$f_i$	۰,۷۶۵۱۹۷۷	۰,۶۲۰۰۰۸۶۰	۰,۴۵۵۴۰۲۲	۰,۲۸۱۸۱۸۶	۰,۱۱۰۳۶۳۲

حل:

$x_i$	$f_i$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۱	۰,۷۶۵۱۹۷۷				
		-۰,۱۴۵۱۱			
۱,۳	۰,۶۲۰۰۸۶۰		-۰,۰۱۹۵۷		
		-۰,۱۶۴۶۸		۰,۰۱۶۰۷	
۱,۶	۰,۴۵۵۴۰۲۲		-۰,۰۰۸۹		-۰,۰۰۳۸۹
		-۰,۱۷۳۵۸		۰,۰۰۶۷۸	
۱,۹	۰,۲۸۱۸۱۸۶		-۰,۰۰۲۱۲		
		-۰,۱۷۱۴۶			
۲,۲	۰,۱۱۰۳۶۳۲				

$$P(x) = 0,7651977 - 0,14511s + \frac{s(s-1)}{2}(-0,01957) + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}(0,01607) \\ + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}(-0,00389)$$

$$P(x) = -0,00016s^4 + 0,002738s^3 - 0,016879s^2 - 0,130809s + 0,7651977$$

داریم:

$$x = 1 + 0,3s \rightarrow 0,3s = x - 1 \rightarrow s = \frac{x-1}{0,3}$$

لذا

$$x = 1,1 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{0,3}$$

بنابراین

$$f(1,1) \simeq 0,719819 \quad (6D)$$

$$f(2) = -0,019753 + 0,101037 - 0,187546 - 0,43603 + 0,7651977$$

$$f(2) \simeq 0,223278$$

۱۰- به کمک شکل درمبنائی چندجمله‌ای درونیاب، چندجمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵ و ۸ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 59 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

برای مسأله ۵

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

برای مسأله ۸

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

باتوجه به مرتبه کم درمبنان مربوط به مسأله ۸ برای این مسأله داریم:

$$P(x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{6} (5x^2 + 9x - 14) \quad \text{و از آن}$$

۱۱- برای تابع جدولی مسأله ۲ مقادیر  $f(4/3)$  و  $f(0/5)$  را تخمین بزنید.

$$P(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{حل:}$$

$$f(0/5) = 0/125 - 1 + 3 = 2/125 \quad \text{درونیایی}$$

$$f(4/3) \simeq 79/507 - 8/6 + 3 \simeq 73/907 \quad \text{بیرونیایی}$$

۱۲- به کمک چندجمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای  $f(2,4)$  و  $f(0)$  مقادیری به دست آورید.

حل:

$$P(x) = \frac{1}{6}(\Delta x^2 + 9x - 14)$$

$$f(2,4) \simeq \frac{1}{6}(28,8 + 21,6 - 14) = 6,067$$

$$f(0) \simeq \frac{1}{6}(-14) \simeq -2,333$$

۱۳- مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

حل:

$x_i$	0	1	2	4
$f_i$	3	2	7	59

$$\bar{y} = 3 + \frac{x-0}{1-0}(2-3) \Rightarrow \bar{y} = 3-x \quad \bar{y} = 3-0,5 = 2,5$$

$$f(0,5) = 2,5$$

$$\bar{y} = 7 + \frac{x-2}{4-2}(59-7) \Rightarrow \bar{y} = 7 + \frac{x-2}{2}(52)$$

$$f(4,3) = 7 + \frac{2,3}{2}(52) = 66,8$$

$x_i$	-1	1	2
$f_i$	-3	0	4

$$\bar{y} = -3 + \frac{x+1}{1+1}(3) \Rightarrow \bar{y} = -3 + \frac{x+1}{2}(3) \Rightarrow f(0) = -1,5$$

$$\bar{y} = 0 + \frac{x-1}{2-1}(4-0) \Rightarrow \bar{y} = 4(x-1) \Rightarrow f(2,4) = 5,6$$

۱۴- با به دست آوردن یک چندجمله‌ای درجه چهار که تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر  $f(5)$ ،  $f(6)$  و  $f(7)$  را پیشگویی (برونیابی) کنید.

$x_i$	0	1	2	3	4
$f_i$	1	-1	1	-1	1

حل:

$x_i$	$f_i$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۰	۱				
		-۲			
۱	-۱		۴		
		۲		-۸	
۲	۱		-۴		۱۶
		-۲		۸	
۳	-۱		۴		
		۲			
۴	۱				

$$P(x) = 1 + (-2)s + 4 \frac{s(s-1)}{2} - 8 \frac{s(s-1)(s-2)}{6} + 16 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}$$

$$P(x) = 1 - 2s + 2s^2 - 2s - \frac{4}{3}s^3 + 4s^2 - \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}s^3 - 4s^2 + \frac{22}{3}s^2 - 4s$$

$$P(x) = \frac{2}{3}s^3 - \frac{16}{3}s^2 + \frac{40}{3}s^2 - \frac{32}{3}s + 1$$

$$x = x_0 + sh \Rightarrow x = 0 + s \Rightarrow x = s$$

$$P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{40}{3}x^2 - \frac{32}{3}x + 1$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 16x^2 + 40x^2 - 32x + 3)$$

$$f(5) = \frac{1}{3}(1250 - 2000 + 1000 - 160 + 3) = 31$$

$$f(6) = \frac{1}{3}(2592 - 3456 + 1440 - 192 + 3) = 129$$

$$f(7) = \frac{1}{3}(4802 - 5488 + 1960 - 224 + 3) = 351$$

۱۵- مانند مسأله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر  $f(5)$ ،  $f(6)$  و  $f(7)$  را پیشگویی کنید.

$x_i$	۰	۱	۲	۳	۴
$f_i$	۰	۰	۱	۰	۰

حل:

$x_i$	$f_i$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۰	۰				
۱	۰	۰	۱		
۲	۱	۱	-۲	-۳	۶
۳	۰	-۱	۳		
۴	۰	۰	۱		
۵	۰				

$$f(x) = \frac{s(s+1)}{2} + \frac{3s(s+1)(s+2)}{6} + \frac{6s(s+1)(s+2)(s+3)}{24}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}s^3 + 2s^2 + \frac{19}{6}s^2 + 3s$$

$$f(x) = \frac{1}{6}(x-4)^3 + 2(x-4)^2 + \frac{19}{6}(x-4) + 3(x-4)$$

$$f(5) = \frac{1}{6} + 2 + \frac{19}{6} + 3 = 10$$

$$f(6) = \frac{1}{6}(16) + 2(8) + \frac{19}{6}(4) + 6 = 45$$

$$f(7) = \frac{1}{6}(121) + 2(27) + \frac{19}{6}(9) + 3(3) = 126$$

### «مسائل تکمیلی فصل سوم»

۱- اگر مقدار تابع  $f$  در  $x_0$  برابر  $f_0$  و در  $x_1$  برابر  $f_1$  باشد چندجمله‌ای درونیاب  $f$  را در نقاط  $x_0$  و  $x_1$  به دست آورید و به کمک آن تخمینی از  $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$  را محاسبه کنید.

۲- در جدول زیر تقریبی از  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$  و  $f\left(\frac{2}{3}\right)$  برآورد کنید:

$x_i$	-۱	۰	۱	۲
$f_i$	-۲	-۱	۰	۷

۳- در چندجمله‌ای لاگرانژ اگر  $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$  باشد نشان دهید

$$L_j(x) = \frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x)}$$

۴- درجه چندجمله‌ای مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید:

$x_i$	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$f_i$	۳	۲	۷	۲۴	۵۹	۱۱۸

۵- اگر  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$  چندجمله‌ای درونیاب  $f$  را در نقاط  $x_0 = -۱$ ،  $x_1 = ۰$ ،  $x_2 = ۱$  به دست آورید و یک کران بالا برای خطای آن حساب کنید.

۶- اگر  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  ثابت کنید:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[y_0, y_1, \dots, y_n]$$

(یعنی در تفاضلات تقسیم شده ترتیب  $x_i$  ها اهمیتی ندارد.)

۷- اگر  $f(x) = x^{n+1}$  و  $p(x)$  چندجمله‌ای درونیاب  $f$  در نقاط متمایز  $x_0$  تا  $x_n$  باشد نشان دهید:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = ۱ \quad \text{ب)} \quad p(x) = x^{n+1} - (x-x_0)\cdots(x-x_n) \quad \text{الف)}$$

۸- به کمک جدول زیر یک برآورد از  $\sin ۵^\circ$  و  $\sin ۱۵^\circ$  به دست آورید:

$x_i$	۰	۱۰	۲۰	۳۰
$\sin x_i$	۰	۰٫۱۷۳۶	۰٫۳۴۲	۰٫۵

۹- برای تابع جدولی زیر مقدارهای  $f[-1, 1, 2]$  و  $f[1, 2, 3]$  را حساب کنید:

$x_i$	-1	1	2	3
$f_i$	-1/1	3/2	1/2	31/2

۱۰- در چه صورتی چندجمله‌ای درونیاب تابع  $f$  در نقاط متمایز  $x_0, x_1, \dots, x_n$  خود تابع  $f$  است.

۱۱- تابع  $\cos x$  را با چه اندازه گام  $h$  باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نایبشر از  $10^{-2} \times \frac{1}{4}$  شود.

۱۲- به کمک چندجمله‌ای درونیاب  $f(x) = x^4 + 1$  کسر  $\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$  را تجزیه کنید.

۱۳- فرض کنید  $f(x) = x^k$ ، چندجمله‌ای درونیاب  $f$  را در نقاط  $x_0, x_1, \dots, x_n$  به دست آورید.

۱۴- با استفاده از مقادیر  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  و  $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$  تقریبی از  $\cos 50^\circ$  به دست آورید.

۱۵- تابع  $\sin x$  را با چه اندازه گام  $h$  باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نایبشر از  $10^{-6} \times \frac{1}{4}$  شود.

۱۶- با استفاده از تفاضلات تقسیم شده چندجمله‌ای درجه سوم را برحسب  $y$  چنان بسازید که در

$y = 0, 1, 16, 81$  بر  $x = y^{\frac{1}{4}}$  منطبق شود. مقدار چندجمله‌ای را برای  $y = 64$  حساب کنید.

۱۷- با فرض این‌که

$$f(-2) = 46, \quad f(-1) = 4, \quad f(1) = 4, \quad f(3) = 156, \quad f(4) = 484$$

برای محاسبه  $f(0)$  از دستور لاگرانژ استفاده کنید.

۱۸- به کمک دستور تفاضلات تقسیم شده مقدار  $f(0)$  را در جدول زیر حساب کنید:

$x_i$	-2	-1	1	3
$f_i$	46	4	4	156

۱۹- معادله  $x - 9^{-x} = 0$  یک جواب در  $[0, 1]$  دارد. چندجمله‌ای درونیاب را در نقاط زیر برای تابع

$$f(x) = x - 9^{-x} \text{ بیابید.}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$$

با مساوی سفر قرار دادن چند جمله‌ای درونیاب و حل معادله یک جواب تقریبی برای ریشه معادله بیابید.

۲۵- ثابت کنید اگر  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه  $k$  باشد آن‌گاه برای  $n > k$  داریم:

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$$

۲۶- چندجمله‌ای درونیاب نیوش را برای جدول زیر تعیین کنید:

$x$	۰	۸	۲	۷
$y$	۵۱	۳	۱	۲۰۱

۲۷- به کمک درونیابی لاگرانژ چندجمله‌ای درجه ۳ یا کمتر را که با  $f(x) = x^4$  در  $x_1 = 6$  و  $x_2 = 7$  یکی است محاسبه کنید.

۲۸- چندجمله‌ای درونیاب تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را یک‌بار در نقاط ۱، ۸ و ۲۷ و یک‌بار هم در نقاط ۰،

۱، ۸ و ۲۷ به دست آورید. چندجمله‌ای درونیاب اول را  $p_1(x)$  و دومی را  $p_2(x)$  بنامید.  $p_2(14)$  و  $p_1(14)$

$p_2(14)$  را به دست آورید. چرا خطای  $p_2(14)$  بیشتر از خطای  $p_1(14)$  است.

۲۹- داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید:

$x$	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	-۳	-۱	۰	۵

چندجمله‌ای درونیاب جدول فوق را بیابید و  $f(1/5)$  و  $f(1/5)$  را تقریب بزنید.

۳۰- چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر از چه درجه‌ای است؟ با افزودن نقطه  $(x_4, f_4) = (3, 0)$  و  $(x_5, f_5) = (3, 0)$

به جدول، چندجمله‌ای درونیاب را با استفاده از محاسبات قبلی به دست آورید.

$x_i$	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$f_i$	$f_1 = 1$	$f_2 = 1.75$	$f_3 = 2.25$

۳۱- چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از  $f(1.8)$  و  $f(1.4)$  ارائه نمایید.

$x_i$	$x_1 = 1$	$x_2 = 1.25$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 1.75$	$x_5 = 2$
$f_i$	$f_1 = 1$	$f_2 = 1.35$	$f_3 = 1.15$	$f_4 = 1.2$	$f_5 = 1.18$

۳۲- چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از  $f(3.5)$  و  $f(1.5)$  ارائه نمایید.

$x_i$	۰	۱	۲	۳	۴
$f_i$	۰	۰.۵	۷	۲۵.۵	۶۲

۲۸- نشان دهید که اگر  $f$  یک تابع چندجمله‌ای درجه  $n$  به صورت  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  باشد و  $x_0$  ها دو به دو متمایز باشند آن‌گاه

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = a_n$$

۲۹- تقریبی از مشتق تابع  $f(x)$  را در نقاط  $x = 0.1$  و  $x = 0.5$  به دست آورید هرگاه  $f$  به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

$x_i$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f_i$	0.9950	0.9800	0.9553	0.9210	0.98775

# فصل چهارم

## مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱- تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در نظر بگیرید. فاصله  $[1, 1.30]$  را به صورت  $x = 1.0(0.105)1.30$  جدول‌بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.  
الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار  $f'(1)$  را بدست آورید.

$$f'_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad \text{حل:}$$

$$f'(1) \cong \frac{f(1.105) - f(1)}{0.105} = \frac{\sqrt{1.105} - 1}{0.105} = 0.494$$

ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار  $f'(1)$  را بدست آورید.

$$f'_i \cong \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \quad \text{حل:}$$

$$f'(1) \cong \frac{2\sqrt{1.105} - \frac{1}{2}\sqrt{1.1} - \frac{3}{2}}{0.105} = 0.4997$$

پ. با استفاده از رابطه (۱۰) یک تقریب برای  $f''(1)$  بدست آورید.

$$f''_i \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \quad \text{حل:}$$

$$f''(1) \cong \frac{\sqrt{1.1} - 2\sqrt{1.105} + 1}{(0.105)^2} = -\frac{0.000581305}{0.011025} = -0.2325$$

۲- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای  $f'_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$  به دست آورید.

حل:

$x_i$	$f_i$	$\Delta f_i$	$\Delta^2 f_i$
۱	۱		
۱,۰۵	$\sqrt{۱,۰۵}$	۰,۰۲۴۶۹	-۰,۰۰۰۰۵۸
۱,۱	$\sqrt{۱,۱}$	۰,۰۲۴۱۱	-۰,۰۰۰۰۵۳۹
۱,۱۵	$\sqrt{۱,۱۵}$	۰,۰۲۳۵۷۱	-۰,۰۰۰۰۵۰۷
۱,۲	$\sqrt{۱,۲}$	۰,۰۲۳۰۶۴	-۰,۰۰۰۰۴۷۶
۱,۲۵	$\sqrt{۱,۲۵}$	۰,۰۲۲۵۸۸	-۰,۰۰۰۰۴۴۷
۱,۳	$\sqrt{۱,۳}$	۰,۰۲۲۱۴۱	

$$f'_1 = ۰,۴۹۳۸ \quad f'_7 = ۰,۴۸۲ \quad f'_8 = ۰,۴۷۰۲$$

$$f'_9 = ۴۶۱۲۸ \quad f'_0 = ۰,۴۵۱۷۶$$

۳- مسأله ۲ را با استفاده از رابطه ۹ حل کنید.

$$f'_i \cong \frac{1}{h} \left[ \Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i \right] \quad \text{حل:}$$

$$f'_1 = ۰,۴۹۹۶ \quad f'_7 = ۰,۴۸۷۵۹$$

$$f'_8 = ۰,۴۷۶۴۶ \quad f'_9 = ۰,۴۶۶۰۴ \quad f'_0 = ۰,۴۵۶۲۳$$

۴- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه ۱۰ مقادیری برای  $f''_i, i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$  به دست آورید.

$$f''_i = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad \text{حل:}$$

$$f''_1 = -۰,۲۳۲ \quad f''_7 = -۰,۲۱۵۶ \quad f''_8 = -۰,۲۰۲۲۸ \quad f''_9 = -۰,۱۹۰۴$$

$$f''_0 = -۰,۱۷۸۸$$

۵- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه ۱۲ تقریبی برای  $f'(۱,۱۲۵)$  به دست آورید.

حل:

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$f'(1/1 + 0/025) \cong \frac{f(1/15) - f(1/1)}{0/05} = \frac{\sqrt{1/15} - \sqrt{1/1}}{0/05} = 0/4714$$

۶- انتگرال  $\int_1^{1/3} \sqrt{x} dx$  را در نظر بگیرید مقادیر خواسته شده را با  $(\Delta D)$  به دست آورید.

الف.  $T(0/3)$  ب.  $T(0/15)$  پ.  $T(0/1)$  ت.  $T(0/5)$

حل:

$$T(0/3) = \frac{0/3}{2} [f(1) + f(1/3)] = 0/15 [1 + \sqrt{1/3}] = \frac{0/642051}{2} = 0/32102$$

$$T(0/15) = \frac{0/15}{2} [f(1) + 2f(1/15) + f(1/3)] = 0/075 [1 + 2\sqrt{1/15} + \sqrt{1/3}]$$

$$= 0/32137$$

$$T(0/1) = \frac{0/1}{2} [f(1) + 2f(1/1) + 2f(1/2) + f(1/3)]$$

$$= 0/05 [1 + 2\sqrt{1/1} + 2\sqrt{1/2} + \sqrt{1/3}] = 0/3214$$

$$T(0/5) = \frac{0/5}{2} [f(1) + 2f(1/5) + 2f(1/1) + 2f(1/15) + 2f(1/2)$$

$$+ 2f(1/25) + f(1/3)]$$

$$= \frac{0/5}{2} [1 + 2\sqrt{1/5} + 2\sqrt{1/1} + 2\sqrt{1/15}$$

$$+ 2\sqrt{1/2} + 2\sqrt{1/25} + \sqrt{1/3}] = 0/32147$$

۷- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  را به ازای  $h = 1, h = 0/5, h = 0/25$  به دست آورید.

$$T(1) = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = 0/7500$$

حل:

$$T(0/5) = \frac{0/5}{2} [f(0) + 2f(0/5) + f(1)]$$

$$= \frac{0/5}{2} [1 + 1/3333 + \frac{1}{2}] = 0/7083$$

$$T(0/25) = \frac{0/25}{2} [f(0) + 2f(0/25) + 2f(0/5) + 2f(0/75) + f(1)]$$

$$= \frac{0/25}{2} [1 + 2[\frac{1}{1/25} + \frac{1}{1/5} + \frac{1}{1/75}] + \frac{1}{2}] = 0/6970$$

۸- مقدار  $\int_0^1 x^x dx$  را به روش دوزنقه‌ای و به ازای  $h = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  حساب کنید.  
حل:

$$T(1) = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + f(1)] = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{8}\right) &= \frac{1}{8}[f(0) + 2\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right] + f(1)] \\ &= \frac{1}{8}\left[0 + 2\left[\frac{1}{\sqrt[4]{6}} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}\right] + 1\right] = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

۹- تقریبی از  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$  را با  $T\left(\frac{\pi}{8}\right)$  به دست آورید.

$$T\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16}[f(0) + 2\left[f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + f\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right] + f\left(\frac{\pi}{4}\right)] = 0.987111$$

۱۰- تقریب‌هایی از  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  را با  $T\left(\frac{1}{4}\right)$  و  $T(1)$  به دست آورید.  
حل:

$$T(1) = \frac{1}{2}[f(1) + 2f(2) + f(3)] = \frac{7}{6}$$

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4}\left[f(1) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{5}{4}\right) + f(2)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{32}{15} + \frac{1}{3}\right] = \frac{52}{60} \end{aligned}$$

۱۱- مقدار انتگرال  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  را با  $S(0.1)$  به دست آورید.  
حل:

$$\begin{aligned} S(0.1) &= \frac{0.1}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + 2f(0.4) + 4f(0.5) \\ &\quad + 2f(0.6) + 4f(0.7) + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)] = 0.69315023 \approx 0.6931 \end{aligned}$$

۱۲- مقدار انتگرال  $\int_0^1 x^x dx$  را با  $S(0.5)$  به دست آورید.

$$S(0.5) = \frac{0.5}{3}[f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{0.5}{3}[0 + 4(0.5)^2 + 1] = 0.25 \quad \text{حل:}$$

۱۳- مقدار انتگرال  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  را با  $S(0, 25)$  را به دست آورید. (قرار دهید  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ )  
 حل: باتوجه به حد بیان شده داریم  $f(0) = 1$  لذا

$$S(0, 25) = \frac{0,25}{3} [f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)]$$

$$= \frac{0,25}{3} \left[ 1 + 4 \frac{\sin 0,25}{0,25} + 2 \frac{\sin 0,5}{0,5} + 4 \frac{\sin 0,75}{0,75} + \sin 1 \right] = 0,946086 \approx 0,9461$$

۱۴- مقدار انتگرال  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$  را به روش سیمپسون و  $h = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{64}$  به دست آورید.  
 حل:

$$S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{24} \left[ \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1,000134585$$

$$S\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{48} \left[ \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{3\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{5\pi}{16} \right.$$

$$\left. + 2 \sin \frac{3\pi}{8} + 4 \sin \frac{7\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1,00000081$$

$$S\left(\frac{\pi}{32}\right) = \frac{\pi}{96} \left[ \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{32} + 2 \sin \frac{\pi}{16} + 4 \sin \frac{3\pi}{32} + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{5\pi}{32} \right.$$

$$+ 2 \sin \frac{3\pi}{16} + 4 \sin \frac{7\pi}{32} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{9\pi}{32} + 2 \sin \frac{10\pi}{32} + 4 \sin \frac{11\pi}{32}$$

$$+ 2 \sin \frac{12\pi}{32} + 4 \sin \frac{13\pi}{32} + 2 \sin \frac{14\pi}{32} + 4 \sin \frac{15\pi}{32} + \sin \frac{\pi}{2} \left] = 0,99999983 \right.$$

$$S\left(\frac{\pi}{64}\right) = 1,00000003 \text{ به طور مشابه}$$

۱۵- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید مقدار  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  را به روش دوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

$x_i$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f_i$	0	0,258812	0,5	0,70711	0,86603	0,96593	1

حل: داریم  $h = \frac{\pi}{12}$  لذا

$$T\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{24} \left[ f(0) + 2 \left[ f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{2\pi}{12}\right) + f\left(\frac{3\pi}{12}\right) + f\left(\frac{4\pi}{12}\right) + f\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{24} [2[0,258812 + 0,5 + 0,70711 + 0,86603 + 0,96593] + 1] = 0,994285$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{12}) &= \frac{\pi}{36} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{12}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{12}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{12}\right) + 4f\left(\frac{5\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi}{36} [4 \times 0,25882 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,70711 + 2 \times 0,86603 + 4 \times 0,96593 + 1] \\ &= 1,00003 \end{aligned}$$

۱۶- با استفاده از فرمول نیوتن - کاتس چهار نقطه‌ای ( $n = 3$ ) مقدار  $\int_1^2 e^{\frac{-x}{2}} dx$  را به دست آورید.  
حل:

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{\frac{-x}{2}} dx &\cong \frac{2}{h} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\ &= \frac{2}{h} \left[ f(1) + 3f\left(\frac{5}{4}\right) + 3f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right] \\ &= \frac{2}{h} \left[ e^{\frac{-1}{2}} + 3e^{\frac{-5}{8}} + 3e^{\frac{-3}{2}} + e^{\frac{-2}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{h} \left[ e^{\frac{-1}{2}} + 3e^{\frac{-5}{8}} + 3e^{\frac{-3}{2}} + e^{\frac{-2}{2}} \right] = 0,76692 \end{aligned}$$

۱۷- با استفاده از فرمول نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای ( $n = 3$ ) تقریبی از انتگرال‌های زیر به دست آورید.  
الف.  $\int_1^2 \sqrt{1+x} dx$   
حل:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1+x} dx &= \frac{1}{h} \left[ f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ 1 + 3\sqrt{\frac{4}{3}} + 3\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{2} \right] = 1,21891 \end{aligned}$$

ب.  $\int_1^{1,5} e^x dx$   
حل:

$$\begin{aligned} \int_1^{1,5} e^x dx &\cong \frac{2h}{h} [f(1) + 3f\left(\frac{5}{6}\right) + 3f\left(\frac{7}{6}\right) + f(1,5)] \\ &= \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{6} [2,718281828 + 3(3,211270543) + \\ &\quad 3(3,793667895) + 4,48168907] \\ &= \frac{1}{16} [28,21478621] = 1,763424138 \end{aligned}$$

۱۸- مقدار  $\int_1^{1,5} e^{-x^2} dx$  را به روش نیوتن - کاتس با  $h = \frac{1}{6}$  به دست آورید.

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &= \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \left[ f(1) + 3f\left(\frac{5}{6}\right) + 3f\left(\frac{4}{3}\right) + f(1.5) \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[ e^{-1} + 3e^{-\frac{25}{36}} + 3e^{-\frac{16}{9}} + e^{-2.25} \right] = 0.10934 \end{aligned} \quad \text{حل:}$$

۱۹. مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{حل:}$$

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] \quad , \quad dx = \frac{b-a}{2} du$$

لذا برای  $a = 1$  و  $b = 1.5$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x &= \frac{0.5u + 1.5}{2} \quad , \quad dx = \frac{0.5}{2} du \\ \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &= \frac{0.5}{2} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{0.5u+1.5}{2}\right)^2} du \\ f(x) &= e^{-\left(\frac{0.5x+1.5}{2}\right)^2} \quad , \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = e^{-1.1224177} \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = e^{-1.1224177} \\ \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &= 0.25 \left[ f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right] = 0.109400 \end{aligned}$$

۲۰. مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \frac{1}{6} \left[ 5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &= \frac{0.5}{2} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{0.5u+1.5}{2}\right)^2} du \\ f(x) &= e^{-\left(\frac{0.5x+1.5}{2}\right)^2} \\ f(0) &= e^{-1.5625} \quad , \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = e^{-2.08212292} \quad , \quad f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = e^{-2.08212292} \\ \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &= \frac{0.5}{2} \times \frac{1}{6} [5 \times e^{-1.115877082} + 8 \times e^{-1.5625} + 5 \times e^{-2.08212292}] \\ &= 0.109364196 \end{aligned}$$

۲۱. مقدار  $\int_1^{\pi} e^x \sin x dx$  را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] \quad \text{و} \quad dx = \frac{b-a}{2} du$$

$$x = u + 2 \Rightarrow dx = du$$

$$\int_1^7 e^x \sin x dx = \int_{-1}^5 e^{u+2} \sin(u+2) du$$

$$f(x) = e^{x+2} \sin(x+2)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7,038834223 \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4,102660422$$

$$\int_1^7 e^x \sin x dx = 11,14149$$

۲۲- مقدار انتگرال مسأله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = u + 2 \quad dx = du$$

$$\int_1^7 e^x \sin x dx = \int_{-1}^5 e^{u+2} \sin(u+2) du \quad , \quad f(x) = e^{x+2} \sin(x+2)$$

$$f(0) = 6,718849 \quad , \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 5,752548 \quad , \quad f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 3,204416622$$

$$\int_1^7 e^x \sin x dx = \frac{1}{4}[5 \times 3,204417 + 8 \times 6,71884 + 5 \times 5,75255] = 10,948395$$

۲۳- تقریبی‌هایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای  $h$  های داده شده به دست آورید.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad , \quad h = 0,1 \quad \text{الف.}$$

$$\text{حل: با } f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \cong M(h) = h \left[ f(x_0 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_1 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2}) \right]$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,1[f(0,05) + f(0,15) + f(0,25) + f(0,35) + f(0,45) + f(0,55) + f(0,65) + f(0,75) + f(0,85) + f(0,95)] = 0,6928353$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad , \quad h = 0.2 \quad \text{ب.}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= 0.2[f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)] \\ &= 0.2[4.66645144] = 0.93329028 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad h = 0.2 \quad \text{پ.}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= 0.2[f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)] = \\ &= 0.2\left[\frac{\sin 0.1}{0.1} + \frac{\sin 0.3}{0.3} + \frac{\sin 0.5}{0.5} + \frac{\sin 0.7}{0.7} + \frac{\sin 0.9}{0.9}\right] = 0.946585 \end{aligned}$$

۲۴- تقریبی از  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  حساب کنید. برای این منظور قرار دهید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

سپس به روش قاعده نقطه میانی و  $h = 0.1$  مقدار  $\int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  و  $h = 0.1$  مقدار  $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  را حساب کنید.

حل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 0.1[f(0.905) + f(0.915) + f(0.925) + f(0.935) + f(0.945) \\ &\quad + f(0.955) + f(0.965) + f(0.975) + f(0.985) + f(0.995)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 0.1\left[\frac{1}{0.22541} + \frac{1}{0.40345} + \frac{1}{0.37996} + \frac{1}{0.35465} + \frac{1}{0.32707} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{0.29660} + \frac{1}{0.26224} + \frac{1}{0.22220} + \frac{1}{0.17255} + \frac{1}{0.09874}\right] = 0.48316 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &\cong 0.1[f(0.05) + f(0.15) + f(0.25) + f(0.35) + f(0.45) \\ &+ f(0.55) + f(0.65) + f(0.75) + f(0.85) + f(0.95)] \\ &= 0.1\left[\frac{1}{0.99874} + \frac{1}{0.99868} + \frac{1}{0.99824} + \frac{1}{0.99674} + \frac{1}{0.99302} \right. \\ &\left. + \frac{1}{0.985164} + \frac{1}{0.97593} + \frac{1}{0.96443} + \frac{1}{0.952678} + \frac{1}{0.939249}\right] = 1.107143 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong 1.107143 + 0.000000 = 1.107143 \quad \text{بنابراین}$$

۲۵- تقریبی از  $\int_0^2 x \sin 2x dx$  را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از ۰.۵ باشد.

$$\text{حل: داریم } a = 0, b = 2, \varepsilon = 0.5 \text{ و } M_2 = 12$$

$$|E(T(h))| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

$$f''(x) = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x$$

$$|f''(x)| = |4 \cos 2x - 4x \sin 2x| \leq 4|\cos 2x| + 4|x||\sin 2x| \leq 12 = M_2$$

$$\frac{(2-0)}{12} h^2 (12) \leq 0.5$$

لذا بایستی

$$h^2 \leq \frac{0.5}{1} \Rightarrow h^2 \leq 0.5 \Rightarrow h \leq 0.707 \quad \text{و یا}$$

بنابراین قرار می‌دهیم  $h = 0.5$  و  $T(0.5)$  را حساب می‌کنیم.

$$T(0.5) = \frac{0.5}{4} (0 + 2(0.5 \sin 1 + \sin 2 + 1.5 \sin 3) + 2 \sin 4) = 0.39245$$

۲۶- تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از  $0.0001$  و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

$$\text{الف. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad \text{ب. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{پ. } \int_0^1 e^x dx$$

حل: الف.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

$$|f''(x)| \leq 1 = M_r$$

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 M_r \leq 0.0001$$

$$\frac{\pi}{24} h^2 \leq 0.0001 \Rightarrow h^2 \leq \frac{0.0001 \times 24}{\pi} = \frac{0.0024}{\pi}$$

$$h \leq 0.027 \quad h = 0.027$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0.027} = 58$$

ب.

$$f(x) = x \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x$$

$$|f''(x)| \leq 2 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_r = 4$$

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 \times 4 \leq 0.0001 \Rightarrow \frac{\pi h}{6} \leq 0.0001 \Rightarrow h \leq 0.001381$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0.001381} = 113.6693 \Rightarrow n = 114$$

پ.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

$$|e^x| \leq 2.71 \Rightarrow \frac{2.71 h^2}{12} \leq 0.0001 \Rightarrow h^2 \leq \frac{0.0012}{2.71} = 0.00044$$

$$h = 0.02 \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0.02} = 50 \Rightarrow n = 50$$

توجه داشته باشید که در تمام قسمت‌ها به علت بزرگ بودن  $n$  محاسبه تقریبی از انتگرال‌های داده شده با دست امکانپذیر نیست و نیاز به یک برنامه کامپیوتری دارد.

۲۷- حدود  $h$  را برای محاسبه تقریبی  $\int_0^1 e^x \sin x dx$  چنان تعیین کنید که:

الف. داشته باشیم  $|ET(h)| \leq 10^{-5}$

ب. داشته باشیم  $|ES(h)| \leq 10^{-5}$

حل: الف.

$$f(x) = e^x \sin x dx \rightarrow f''(x) = 2e^x \cos x$$

$$|f''(x)| = |2e^x \cos x| \leq 2 \times 2,718281828 = 5,436563657 = M_f$$

$$ET(h) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 M_f$$

$$\frac{1}{12} h^2 \times 5,436563657 \leq 10^{-5}$$

$$h^2 \leq \frac{12 \times 10^{-5}}{5,436563657} = 0,2207276647 \times 10^{-2}$$

$$h \leq 0,004697$$

قرار می دهیم  $h = 0,0045$  و از آن  $n \simeq 223$ .

ب.

$$ES(h) = \frac{-(b-a)}{180} h^3 f^{(3)}(\eta)$$

$$f^{(3)}(x) = -4e^x \sin x$$

$$|f^{(3)}(x)| \leq 4 \times 2,71 = 10,84 = M_f$$

$$|ES(h)| = \frac{1}{180} h^3 \times 10,84 \leq 10^{-5}$$

$$h^3 \leq \frac{180 \times 10^{-5}}{10,84} = 1,65545748 \times 10^{-2}$$

$$n = \frac{(b-a)}{h} = 9 \text{ و از آن } h \leq 0,11343$$

۲۸- روش انتگرال گیری زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b f(\sqrt{x}) dx \cong w_0 f(a) + w_1 f(c) + w_2 f(b)$$

شماره  $w_0, w_1, w_2$  را طوری به دست آورید که روش انتگرال گیری فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه دو دقیق باشند.

حل: فرمول بالا را برای  $f(x) = 1, x, x^2$  به کار می‌بریم (که این فرمول برای این توابع دقیق در نظر گرفته

می‌شود.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^h 1 dx = h = w_0 + 0 + w_2$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^h \sqrt{x} dx = \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^h = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} = 0 + w_1 + w_2 h$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2} = 0 + 0 + h^2 w_2$$

$$w_0 + w_2 = h$$

$$w_1 + w_2 h = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}}$$

$$w_2 h^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{2}$$

$$w_1 = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} - \frac{h}{2}, \quad w_0 = h - \frac{1}{2}$$

۲۹- فرض کنید در تقریب زیر معیار دقت آن باشد که رابطه برای چند جمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد:

$$\int_0^6 f(x) dx \cong \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i)$$

که در آن  $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 6$  مطلوبست محاسبه  $w_i$  برای  $i = 0, 1, 2, 3$ :  
حل:

$$\int_0^6 f(x) dx \cong w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\int_0^6 f(x) dx \cong w_0 f(0) + w_1 f(2) + w_2 f(5) + w_3 f(6)$$

فرمول بالا را برای  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$  بکار می‌بریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^6 dx = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 6$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^6 x dx = 2w_0 + 5w_1 + 6w_2 = 18$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^6 x^2 dx = 4w_0 + 20w_1 + 36w_2 = 72$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^6 x^3 dx = 8w_0 + 48w_1 + 216w_2 = 324$$

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 6$$

$$2w_1 + 5w_2 + 6w_3 = 18$$

$$4w_1 + 25w_2 + 36w_3 = 72$$

$$8w_1 + 125w_2 + 216w_3 = 324$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_0 = \frac{3}{5}, \quad w_1 = 3, \quad w_2 = \frac{12}{5}, \quad w_3 = 0$$

۳۰- برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع  $f$  در فاصله  $[0, 6]$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x) dx \cong w_0 f(h) + w_1 f(3h) + w_2 f(5h)$$

الف. ضرایب  $w_0, w_1, w_2$  را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.  
 حل: فرض می‌کنیم که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.  
 فرمول بالا را برای  $f(x) = 1, x, x^2$  بکار می‌بریم

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^{6h} dx = 6h = w_0 + w_1 + w_2$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^{6h} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{6h} = \frac{36}{2} h^2 = 18h^2 = hw_0 + 3hw_1 + 5hw_2$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^{6h} x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{6h} = 72h^3 = h^3 w_0 + 9h^3 w_1 + 25h^3 w_2$$

$$w_0 + w_1 + w_2 = 6h$$

$$w_0 + 3w_1 + 5w_2 = 18h$$

$$w_0 + 9w_1 + 25w_2 = 72h$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$w_0 = \frac{9}{5}h, \quad w_1 = \frac{3}{5}h, \quad w_2 = \frac{9}{5}h$$

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چندجمله‌ای‌های درجه ۳ دقیق است.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-h}^{+h} x^2 = 324h^3$$

از طرف دیگر باتوجه به رابطه داریم

$$\frac{9}{4}h^3 + \frac{3}{2}h \times 27h^2 + \frac{9}{4}h^3 \times 125 = 324h^3$$

که با مقدار دقیق انتگرال‌گیری برابر است.

۳۱- قسمت‌های الف و ب مسأله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx \cong h[w_1 f(-h) + w_2 f(0) + w_3 f(h)]$$

حل: فرض می‌کنیم که فرمول فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد قرار می‌دهیم

$$f(x) = 1, x, x^2$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-h}^{+h} dx = 2h = h[w_1 + w_2 + w_3]$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-h}^{+h} x dx = 0 = h[-w_1 h + h w_3]$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-h}^{+h} x^2 dx = \frac{2h^3}{3} = h[w_1 h^2 + w_3 h^2]$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$-w_1 + w_3 = 0$$

$$w_1 + w_3 = \frac{2}{3}$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_1 = \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{4}{3}, \quad w_3 = \frac{1}{3}$$

برای  $f(x) = x^2$  داریم

$$\int_{-h}^{+h} x^2 dx = 0$$

مقدار انتگرال:

$$h\left[\frac{-h^3}{3} + 0 + \frac{h^3}{3}\right] = 0$$

مقدار به دست آمده از فرمول:

که هر دو با هم برابرند، لذا قاعده بیان شده برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ نیز دقیق است.

### «مسائل تکمیلی فصل چهارم»

- ۱- مقدار  $\int_0^5 \frac{x^5}{5} dx$  را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای به ازای  $h = \frac{1}{4}$  و  $h = \frac{1}{5}$  به دست آورید.
- ۲- مقدار  $\int_0^1 \sqrt{x^2} dx$  را با استفاده از روش سیمپسون و با  $S(0, 25)$  به دست آورید.
- ۳- مقدار  $\int_0^1 \frac{\sec x}{x} dx$  را با  $S(0, 5)$  به دست آورید.
- ۴- مقدار  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$  را به روش سیمپسون و با  $h = \frac{\pi}{16}$  و  $h = \frac{\pi}{8}$  به دست آورید.
- ۵- مقدار  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  را با  $h = 0,5$  یک بار با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و یک بار از روش سیمپسون به دست آورید و نتایج هر دو را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.
- ۶- با استفاده از روش نیوتن - کاتس چهار نقطه‌ای مقدار انتگرال  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sec^2 x dx$  را تقریب بزنید.
- ۷- با استفاده از روش نیوتن - کاتس چهار نقطه‌ای مقدار انتگرال مربوط سوال ۴ را حل نمایید و جواب به دست آمده با جواب به دست آمده در سوال ۴ و همچنین با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.
- ۸- مقدار  $\int_0^{1,5} e^x \sin x dx$  را با  $h = \frac{1}{4}$  و با استفاده از روش نیوتن - کاتس به دست آورید.
- ۹- مقدار انتگرال مسأله ۳ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.
- ۱۰- مقدار انتگرال مسأله ۵ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.
- ۱۱- مقدار  $\int_0^1 x \tan^{-1} x dx$  را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای به دست آورید.
- ۱۲- مقدار  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$  را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای به دست آورید جواب به دست آمده را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.
- ۱۳- مقدار  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 1} dx$  را با یک روش مناسب به دست آورید.  $h$  را بگونه‌ای انتخاب کنید که خطا کمتر از  $0,001$  باشد.
- ۱۴- کران بالای خطای انتگرال داده شده در سوال ۳ را به دست آورید.
- ۱۵- کران بالای خطای انتگرال داده شده در سوال ۱ را به دست آورید و آن را با خطای واقعی مقایسه کنید.
- ۱۶- مقدار انتگرال سوال ۱ را با استفاده از روش نقطه میانی به دست آورید و میزان خطای واقعی آن را با خطای واقعی مقادیر به دست آمده در سوال ۱ مقایسه کنید.

۱۷- مقدار انتگرال  $\int_0^2 x^x e^x dx$  را با استفاده از روش سیمپسون چنان بیابید که خطا کمتر از  $0.05^\circ$  باشد.

۱۸- مقدار انتگرال سؤال قبل را با استفاده از روش دوزنقه‌ای چنان بیابید که خطا کمتر از  $0.05^\circ$  باشد.

۱۹- تابع  $f(x)$  بر بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

مقدار  $\int_0^1 f(x) dx$  را با به کار بردن قاعده‌های زیر حساب کنید.

الف: قاعده دوزنقه

ب: قاعده سیمپسون

ج: قاعده دونقطه‌ای گاوس

۲۰- مقدار مشتق تابع  $f(x) = e^x + \cos x$  را در نقطه  $x = 2$  با استفاده از روابط (۸) و (۹) بیابید و آن را با مقدار واقعی مشتق مقایسه کنید.

۲۱- تابع جدولی زیر مفروض است مقدار  $f'$  و  $f''$  و  $f'''$  را حساب کنید.

$x_i$	۰	۱	۲	۳
$f_i$	۲,۹۶۷	۳,۲۶	۴,۹۳	۵,۰۶

۲۲- مقدار مشتق دوم تابع  $f(x) = x^x \tan^{-1} x$  را به ازای  $h = 0.5^\circ$  در نقطه  $x = 5$  محاسبه کنید. (با استفاده از فرمول (۱۴))

۲۳- مقدار مشتق اول تابع داده شده در سؤال قبل را با استفاده از رابطه (۱۲) حساب کنید.

۲۴- مقدار مشتق تابع  $f(x) = \frac{x}{\tan x}$  را با استفاده از روابط ۹ و ۱۲ در نقطه  $x = 2$  و با  $h = 0.25^\circ$  به دست آورید. در هر مورد مقدار به دست آمده را با مقدار واقعی  $f'(2)$  مقایسه کنید.

۲۵- تابع جدولی زیر مفروض است. مقدار  $f'_{i+\frac{1}{2}}$  را برای  $i = 0, 1, 2, 3$  برای آن بیابید.

$x_i$	۰.۵	۱	۱.۵	۲	۲.۵	۳
$f_i$	۱,۷۵	۱,۹۸	۲,۱۸۹	۲,۹۷۶	۲,۵	۲,۸

۲۶- با استفاده از روش سیمپسون مقدار انتگرال  $\frac{1}{5} \int_0^1 \cos x dx$  را طوری به دست آورید که خطا کمتر از  $10^{-5}$  باشد.

۲۷- مطلوب است محاسبه تقریبی  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  :

الف) با روش سیمپسون و با طول گام  $h = 0.25$ .

ب) تعداد نقاط لازم را برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال فوق با روش دوزنقه‌ای طوری بیابید که خطای کل کمتر از  $10^{-2}$  باشد.

۲۸- اگر تابع  $f(x)$  به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

$x_i$	۰٫۰۰	۰٫۵۰	۱٫۰۰
$f_i$	۰٫۰۰	۰٫۵۸	۰٫۸۳

آن‌گاه مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{3} f'(x)} dx$$

(توجه شود که در زیر رادیکال مشتق تابع  $f$  به کار رفته است.)

۲۹- تابع  $f(a) = \int_0^{a+1} e^{ax} dx$  داده شده است. مقدار  $f'(0)$  را با یک تقریب دلخواه محاسبه کنید. (راهنمایی: از تعریف مشتق استفاده کنید.)

۳۰- با استفاده از روش رامبرگ دومرحله‌ای با  $h = 0.4$  تقریبی از انتگرال

$$I = \int_0^{0.7} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

را به دست آورید. (محاسبات را با  $4D$  انجام دهید.)

۳۱- با استفاده از روش دوزنقه‌ای و با  $h = 0.125$ ،  $h = 0.25$  و  $h = 0.5$  تقریبی از انتگرال  $I = \int_0^{0.5} \frac{\cos x}{1+\sqrt{x}} dx$  را با انجام محاسبات تا چهار رقم اعشار به دست آورید. سپس با استفاده از روش رامبرگ و تقریبهای به دست آمده، تقریب بهتری برای  $I$  به دست آورید.