



کاربرد روش‌های عددی در مدل‌سازی ریاضی (همراه با کدهای MATLAB)



مؤلف:

دکتر شهره فاطمی

استاد دانشکده مهندسی شیمی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

با همکاری:

مهندس محمد تقی اف



نشر دانشگاهی کیان
Kian Publication

سرشناسه	فاطمی، شهره، ۱۳۳۵.
عنوان و نام پدیدآور	کاربرد روش‌های عددی در مدل‌سازی ریاضی / مولف شهره فاطمی.
مشخصات نشر	تهران: انتشارات دانشگاهی کیان، ۱۳۹۸.
مشخصات ظاهری	۳۳۲ص: مصور، جدول، نمودار.
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۳۰۷-۲۴۶-۶
وضعیت فهرست‌نویسی	فیا.
موضوع	الگوهای ریاضی.
موضوع	Mathematical models.
موضوع	ریاضیات مهندسی.
موضوع	Engineering mathematics.
رده بندی کنگره	QA ۴۰۱
رده بندی دیویی	۵۱۱/۸
شماره کتابشناسی ملی	۵۸۶۴۵۰۰



انتشارات دانشگاهی کیان

نام کتاب	کاربرد روش‌های عددی در مدل‌سازی ریاضی
مولف	شهره فاطمی
طرح جلد و صفحه آرایشی	واحد تولید نشر دانشگاهی کیان
چاپ اول	۱۳۹۸:
تیراژ	۵۰۰:
چاپ و صحافی	نشر دانشگاهی کیان
قیمت	۴۰۰۰۰ تومان
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۳۰۷-۲۴۶-۶:



خرید اینترنتی آسان از:

www.kianpub.com

بر اساس قانون حقوق مولفان و مصنفان، کلیه حقوق چاپ و نشر این کتاب به طور انحصاری به نشر دانشگاهی کیان تعلق دارد و هرگونه استفاده و برداشت از محتوای این اثر به هر شکلی اعم از چاپ، کپی، اسکن، لوح فشرده، نشر الکترونیک و اینترنتی یا به صورت هرگونه فایل رایانه‌ای، بدون مجوز رسمی ناشر ممنوع و حرام شرعی است و پیگرد قانونی دارد.



kianpublication

برای دریافت اخبار و اطلاعات مفید و شرکت در قرعه کشی، ما را در این شبکه‌ها دنبال کنید.

سخنی با خوانندگان

حمد و سپاس بی پایان، خدایی را سزاست که عالم را در منتهای کمال آفرید و آدمی را بر بلندای قله‌ی هستی گماشت و او را جلوه‌گاه جمال، مخاطب کلام و وارث قلم گردانید و «کتاب» را به عنوان بزرگ‌ترین معجزه‌ی جابودان خویش در اختیار انسان قرار داد. آیین و فرهنگ کهن ما، انس و الفتی دیرین با کتاب داشته‌اند و همواره انسان‌های وارسته، سعادت و آرامش را در کتاب جست‌وجو کرده‌اند؛ چنان‌که به تعبیر امیر مومنان علی علیه السلام: «کسی که با کتاب آرامش یابد، هرگز آسایش از او سلب نمی‌شود».

کتاب حافظه‌ی بشریت است و در ساحت اندیشه، هیچ وسیله‌ای همچون کتاب، واجد ژرفا و کارایی لازم نیست؛ از این رو ترویج و نشر کتاب، نهاده‌سازی فرهنگ کتاب‌خوانی، ارضای حس کنجکاو و پرسشگری دانشجویان و تربیت علمی و فرهنگی نسلی شایسته و درخور، رسالتی مسلم بر دوش ارباب فرهنگ و دانش است. این رسالت، ما را نیز بر آن داشت که به عنوان عضو کوچکی از جامعه‌ی علمی و فرهنگی ایران، پای به میدان نهاده و در تحقق این هدف ارزنده و انسانی، نقشی هرچند اندک ایفا کنیم.

باعث تاسف است که در شرایط کنونی، معضلات اجتماعی و مشکلات روزمره‌ی زندگی، اشتیاق مطالعه را کاسته و با توسعه‌ی سریع دنیای مجازی و شبکه‌های اجتماعی، مطالب کوتاه، سطحی و کم‌محتوا جایگزین کتاب‌های عمیق، مفید و اندیشه‌ساز گردیده و در این میان، مشکلات نشر، همچون هزینه‌های رو به افزایش کاغذ و چاپ و به تبع آن، عدم اقبال عمومی به کتاب، مزید بر علت شده است. اگرچه این تصور که با پدید آمدن وسایل نوظهور ارتباط جمعی، کتاب به انزوا خواهد رفت، تصویری خلاف واقع است، اما از این نکته نیز نباید غافل بود که امتیاز ابزارهای جدید دنیای مجازی، سهولت کاربری آنهاست؛ ولی به هر حال، این ابزارها هرگز از جهت عمق، تحلیل و سازندگی فکر و ذهن، جای کتاب را نخواهند گرفت.

انتشارات دانشگاهی کیان با بیش از یک دهه سابقه فعالیت در تولید و نشر کتاب‌های دانشگاهی و نیز فنی و مهندسی می‌کوشد رسالت‌های خود را در سایه لطف پروردگار و حمایت‌های مخاطبان خود، به بهترین نحو ممکن به انجام رساند. در این راستا، تلاش بر آن است تا آنچه در این نشر به چاپ می‌رسد، حایز معیارهای استاندارد کیفی کتاب باشد و بر همین اساس است که کتاب‌ها در مسیر تولید، با حوصله و دقت تحت نظارت همه‌جانبه محتوایی - معنایی شامل چندین مرحله ویراست علمی و نیز ادبی قرار می‌گیرند تا در نهایت متنی روان و ساده براساس اصول آموزشی تهیه و تدوین شود. همچنین برای همه آثار به لحاظ بصری و زیبایی‌شناختی از منظر صفحه‌آرایی و طراحی جلد، سطح کیفی مناسبی در نظر گرفته شده است.

همه تلاش انتشارات دانشگاهی کیان بر این بوده است تا همگام با خواست مخاطبان خود حرکت و کتاب‌ها را با بالاترین کیفیت منتشر کند، اما به حتم، این اثر خالی از اشکال نیست و از تمامی مخاطبان فهیم آن و سایر آثار نشر خواهشمند است نقدها و نظرهای ارزشمند و سازنده خود را جهت بهبود در کتاب‌های آتی مطرح فرمایند.

نشر دانشگاهی کیان

www.kianpub.com

info@kianpub.com

سخن مولف

در مهندسی داشتن درک ریاضی از تحولات و یافتن نحوه‌ی رفتار متغیرهای حاکم بسیار ضروری است. فرایندهای تولیدی، کنترل فرایند و کیفیت فراورده‌ها، طراحی و بهینه‌سازی، توسعه و احداث فرایندهای جدید، کاهش مصرف انرژی و هزینه‌ها و کاهش آلودگی‌های زیست‌محیطی از مواردی است که مورد توجه مهندسان قرار دارد.

از موارد مهم جهت نیل به این توانایی‌ها امکان مدل‌سازی فرایندها و تحولاتی است که یک مهندس با آن مواجه است. مدل‌سازی، پایه‌ای برای طراحی، شبیه‌سازی و بهینه‌سازی فرایندهای مختلف است. مدل‌سازی‌ها می‌توانند مبنای تجربی یا تئوری (ریاضی) داشته باشند. چنانچه مکانیسم یک تحول و رفتار متغیرهای فرایند به کمک قوانین فیزیکی مشخص باشد، از مدل‌سازی ریاضی استفاده شده که با کمک قوانین عمومی فیزیک و قانون‌های ویژه، معادله‌های ریاضی مناسب تولید می‌شوند که با حل آن‌ها پاسخ‌های مناسب جهت بیان رفتار متغیرهای فرایند نسبت به یکدیگر و نسبت به متغیرهای ورودی، مشخص می‌شود. در برخی از مدل‌ها، رفتار متغیرها از الگوی قابل پیش‌بینی تبعیت نمی‌کند و یا مکانیسم تحول انجام شده مشخص نیست. در این صورت مدل‌سازی‌های آماری و مدل‌سازی‌های مبنی بر روش‌های تصادفی و احتمالات مطرح می‌شوند که کاملاً به اطلاعات تجربی وابسته بوده و با توجه به رفتار تجربی توابع فرایند، مدل‌سازی انجام می‌شود.

برای رسیدن به نتایج پایدار، یافتن تکنیک‌های مناسب با کم‌ترین خطا و همگرایی بالا جهت حل معادله‌های حاصل از فرمول‌بندی تحولات به صورت هم‌زمان بسیار ضروری است. روش‌های تحلیلی که در حل معادله‌های دیفرانسیل پیشرفت زیادی داشته است، امروزه برای حل معادله‌ها و سیستم‌های پیچیده کاربرد نداشته و نیاز به روش‌ها و تکنیک‌های عددی کاملاً محسوس است. در کتاب حاضر کاربرد روش‌های محاسباتی در مدل‌سازی به ویژه در مواجهه با مسایل غیرخطی مورد توجه قرار می‌گیرد. اگرچه امروزه در زمینه‌ی آنالیز و روش‌های عددی در مهندسی، آثار متعددی به چاپ رسیده است، کتاب‌های معدودی به مسایل غیرخطی و جنبه‌های کاربردی روش‌های عددی در فرایندها اختصاص یافته است. در این کتاب سعی شده بر روی آن دسته از روش‌های عددی تکیه شود که در عمل و شرایط واقعی کاربرد بیشتری دارند و با توجه به نوع

معادله‌های حاصل از فرمول‌بندی، اغلب از نوع معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی (معمولی و پاره‌ای) و نیز دستگاه معادله‌های جبری غیرخطی می‌باشند.

از طرفی آماده‌سازی روش‌های عددی و کدنویسی کامپیوتری در روش‌های عددی بسیار مهم است. امروزه نرم‌افزارهای برنامه‌نویسی متعددی مانند MATLAB، FORTRAN، BASIC، C، PASCAL و ... آن‌چنان مورد توجه قرار گرفته‌اند که حداقل احاطه بر یک زبان برنامه‌نویسی برای یک مهندس الزامی است.

در سال‌های اخیر، برنامه‌نویسی در محیط MATLAB در رشته‌های فنی و مهندسی جای خود را باز نموده است. علاوه بر آن MATLAB برخلاف نرم‌افزارهای دیگر، امکان استفاده از برنامه‌های آماده را در اختیار قرار می‌دهد و دیگر لازم نیست تمام مراحل کدنویسی کامپیوتری در آن انجام شود. اگرچه این قابلیت MATLAB باعث کاهش سرعت محاسبه و طولانی شدن اجرای برنامه‌های پیچیده می‌شود، اما باز هم دارای کاربرد و قابلیت‌هایی است که در این کتاب از آن به عنوان محیط برنامه‌نویسی و اجرای تمرین‌ها استفاده شده و در صفحه اینترنتی کتاب، کدهای برنامه و نتایج حاصل ارایه شده است.¹

در این جا لازم است از آقای مهندس محمد تقی‌اف فارغ‌التحصیل مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد دانشکده‌ی فنی دانشگاه تهران که در بخش برنامه‌نویسی مسایل با اینجانب همکاری مستمر داشته‌اند، قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید محترمی که با داوری موثر خود و ارایه‌ی پیشنهادهای سازنده در جهت ارتقای کیفی کتاب نقش موثری داشته‌اند، تشکر می‌کنم.

کتاب حاضر یکی از مراجع مهم درسی دانشجویان مهندسی در مقطع کارشناسی و تحصیلات تکمیلی برای دروس کاربرد ریاضیات در مهندسی، ریاضیات مهندسی پیشرفته، محاسبات عددی پیشرفته، پدیده‌های انتقال و مدل‌سازی و طراحی واکنش‌گاه‌های شیمیایی می‌باشد. همچنین این کتاب در رشته‌های مختلف مهندسی از جمله مواد، مکانیک، عمران و صنایع نیز می‌تواند به عنوان یکی از مراجع درسی و تحقیقی، مورد استفاده قرار گیرد.

شهره فاطمی

تقدیم

تقدیم به

مادرم، فرزندم،

استاد و همکارانم

که ایران را سربلندی خواهند...

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

۱-۱. فرمول بندی توده ای.....	۱۴
۲-۱. فرمول بندی دیفرانسیلی.....	۱۵
۳-۱. حل عددی معادله ها.....	۱۶

فصل دوم: روش های اختلاف محدود

۱-۲. عملگرهای اختلاف محدود.....	۲۳
۱-۱-۲. اختلاف محدود پیشرو.....	۲۳
۲-۱-۲. اختلاف محدود پسرو.....	۲۴
۳-۱-۲. اختلاف محدود مرکزی.....	۲۴
۲-۲. چندجمله های درون یابی.....	۲۶
۱-۲-۲. چندجمله ای نیوتن پیشرو (NFP).....	۲۷
۲-۲-۲. چندجمله ای نیوتن پسرو (NBP).....	۲۷
۳-۲-۲. آنالیز خطا.....	۲۹
۴-۲-۲. چندجمله ای لاگرانژ.....	۳۰
۳-۲. مشتق گیری عددی.....	۳۱
۱-۳-۲. مشتق مرتبه ی اول.....	۳۳
۲-۳-۲. مشتق مرتبه ی دوم.....	۳۵
مراجع.....	۴۰

فصل سوم: معادله های دیفرانسیل معمولی

۱-۳. معادله های دیفرانسیل معمولی رتبه ی اول.....	۴۱
۱-۱-۳. روش های تک مرحله ای.....	۴۲
۲-۱-۳. روش های چندمرحله ای.....	۶۶
۲-۳. معادله های دیفرانسیل معمولی رتبه ی دوم و بالاتر.....	۷۷
۱-۲-۳. مسائل شرط اولیه.....	۷۸
۲-۲-۳. مسائل شرط مرزی.....	۸۱
تمرین.....	۱۲۶
مراجع.....	۱۳۲

فصل چهارم: روش های باقی مانده ی وزنی

۱-۴. روش پرتابی.....	۱۳۴
۲-۴. روش اختلاف های محدود.....	۱۳۴
۳-۴. روش باقی مانده های وزنی.....	۱۳۴
۱-۳-۴. انواع روش های باقی مانده وزنی.....	۱۳۶
۲-۳-۴. روش تلفیق متعامد.....	۱۴۷
۴-۴. حل معادله ی دیفرانسیل پاره ای سهمی گون به روش تلفیق متعامد.....	۱۶۲
تمرین.....	۱۷۱
مراجع.....	۱۷۴

فصل پنجم: دستگاه معادله های جبری خطی و غیر خطی

۱-۵. دستگاه معادله های خطی.....	۱۷۵
۱-۱-۵. دستور کرامر.....	۱۷۷
۲-۱-۵. ماتریس معکوس.....	۱۷۹
۳-۱-۵. روش های حذفی.....	۱۸۰
۴-۱-۵. روش های حدسی.....	۱۹۱
۲-۵. دستگاه معادله های غیر خطی.....	۱۹۸
۱-۲-۵. روش تکرار.....	۱۹۹
۲-۲-۵. روش نیوتن رافسون.....	۱۹۹
۳-۲-۵. خطی سازی ماتریس ضریب ها با کمک حدس عبارت غیر خطی.....	۲۰۱
تمرین.....	۲۱۰
مراجع.....	۲۱۲

فصل ششم: رگرسیون های خطی و غیر خطی

۱-۶. رگرسیون خطی.....	۲۱۵
۱-۱-۶. رگرسیون براساس چند جمله ای درجه ی n.....	۲۱۶
۲-۱-۶. رگرسیون براساس معادله ی خطی چندمتغیره.....	۲۱۸
۲-۶. رگرسیون غیر خطی.....	۲۲۰
۱-۲-۶. خطی سازی تابع مدل.....	۲۲۰
۲-۲-۶. روش های رگرسیون غیر خطی.....	۲۲۳
۳-۲-۶. روش های جست و جوی مستقیم.....	۲۳۶
۳-۶. بهینه سازی غیر خطی بر مبنای روش های جست و جوی مستقیم.....	۲۳۷
تمرین.....	۲۴۰
مراجع.....	۲۴۲

فصل هفتم: معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای

۲۴۵.....	۱-۷. معادله‌های بیضی گون.....
۲۴۵.....	۱-۱-۷. روش اختلاف‌های محدود در معادله‌ی خطی.....
۲۴۷.....	۲-۱-۷. روش اختلاف‌های محدود در معادله‌ی غیرخطی.....
۲۷۳.....	۲-۷. معادله‌های دیفرانسیل سهمی گون.....
۲۷۴.....	۱-۲-۷. روش اختلاف‌های محدود.....
۲۹۲.....	۲-۲-۷. روش خط.....
۳۰۱.....	۳-۲-۷. روش تلفیق متعامد.....
۳۰۲.....	۳-۷. معادله‌های دیفرانسیل هذلولی گون.....
۳۰۲.....	۱-۳-۷. روش صریح خالص.....
۳۰۴.....	۲-۳-۷. روش غیرصریح خالص.....
۳۰۵.....	۳-۳-۷. فرمول کلی.....
۳۰۶.....	تمرین.....
۳۱۰.....	مراجع.....

فصل هشتم: آنالیز پایداری در معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای

۳۱۱.....	۱-۸. خطا.....
۳۱۱.....	۱-۱-۸. خطای برش.....
۳۱۲.....	۲-۱-۸. خطای گسسته کردن معادله.....
۳۱۲.....	۳-۱-۸. خطای گرد کردن.....
۳۱۲.....	۲-۸. پایداری.....
۳۱۳.....	۱-۲-۸. شرط پایداری.....
۳۱۳.....	۲-۲-۸. همگرایی.....
۳۱۳.....	۳-۲-۸. آنالیز پایداری در حل معادله‌های سهمی گون به روش اختلاف‌های محدود.....
۳۲۴.....	تمرین.....
۳۲۴.....	مراجع.....

۳۲۵.....	پیوست ۱: معرفی مازول‌های MATLAB.....
۳۳۱.....	پیوست ۲: فرمول‌های رانج-کاتا.....

فصل



آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- فرمول‌بندی توده‌ای؛
- فرمول‌بندی دیفرانسیلی؛
- حل عددی معادله‌ها.

مقدمه

سخن نخست

مدل‌سازی ریاضی در مهندسی از سه مرحله‌ی اصلی فرمول‌بندی قانون‌های فیزیکی، حل معادله‌های حاصل و بررسی اعتبار مدل تشکیل شده است. بخش فرمول‌بندی با استفاده از قانون‌های عمومی و اختصاصی در مباحث مختلف تبدیل، انتقال جرم، انتقال حرارت و انتقال اندازه حرکت انجام می‌شود و برحسب نوع فرمول‌بندی و نوع سیستم مورد مطالعه به سه بخش فرمول‌بندی توده‌ای، دیفرانسیلی و انتگرالی تقسیم می‌شود. برحسب فرض‌ها و شرایط حاکم بر مسئله، از این فرمول‌بندی‌ها معادله‌های جبری و یا دیفرانسیل حاصل می‌شوند. در مرحله‌ی بعدی با حل این معادله‌ها توابع هدف و رفتار آن‌ها نسبت به متغیرهای مستقل فرایند تعیین می‌شوند. حل معادله‌های مدل به دو روش تحلیلی و عددی تقسیم‌بندی می‌شود که هر یک از این روش‌ها دارای نقاط قوت و ضعف می‌باشند. در مرحله‌ی سوم اعتبار و ارزش‌گذاری مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد، که در این مرحله اطلاعات تجربی، در سطح آزمایشگاهی، بنچ^۱ یا پایلوت مورد نیاز است. در این صورت می‌توان از مدل ریاضی حاصل در طراحی، افزایش مقیاس، شبیه‌سازی و بهینه‌سازی فرایندهای مشابه استفاده کرد.

مبحث مدل‌سازی ریاضی در مهندسی و اهمیت آن جهت مطالعه و درک صحیح از رفتار متغیرها، اصلاح و توسعه‌ی فرایندها پیش از این در کتاب مدل‌سازی ریاضی در مهندسی شیمی [۱] مورد بررسی قرار گرفته است و فرمول‌بندی‌های ریاضی براساس قانون‌های بقای جرم، بقای انرژی

1. Bench

و بقای اندازه حرکت و روش‌های تحلیلی جهت حل معادله‌های حاصل از فرمول‌بندی‌ها ارائه شده است. کتاب حاضر به روش‌های حل عددی معادله‌های حاصل از فرمول‌بندی ریاضی اختصاص یافته است.

با این حساب، آشنایی با روش‌های عددی و استفاده از این روش‌ها به کمک نرم‌افزارهای برنامه‌نویسی به محقق امکان می‌دهد که رفتار فازها و اجزای آن، تغییرات جرم و انرژی، حرکت سیال و اثر متقابل متغیرها بر یکدیگر در مسائل پیچیده‌تر را بتواند مدل‌سازی کند. در فصل حاضر ابتدا مرور مختصری بر فرمول‌بندی توده‌ای و دیفرانسیلی انجام می‌شود، سپس به حل معادله‌های حاصل به روش عددی تأکید می‌گردد و در نهایت توضیح مختصری در مورد فصل‌های مختلف کتاب ارائه می‌شود.

۱-۱. فرمول‌بندی توده‌ای^۱

این فرمول‌بندی ساده‌ترین نوع فرمول‌بندی است و با فرض اختلاط کامل، تابع مورد مطالعه را به صورت یکنواخت و مستقل از مکان (یا ابعاد فرایند) در نظر می‌گیرد. در این نوع فرمول‌بندی، قوانین اساسی در حجم کنترل پیاده‌سازی می‌شوند. با فرض شرایط ناپایا این فرمول‌بندی به معادله یا معادله‌های دیفرانسیل معمولی رتبه‌ی اول برحسب متغیر زمان منتهی می‌شود، (مانند یک واکنشگاه اختلاط کامل مداوم در شرایط شروع یا پایان فرایند) و چنانچه فرایند مورد نظر در شرایط پایا باشد، حاصل فرمول‌بندی به صورت معادله یا معادله‌های جبری خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت حاصل فرمول‌بندی توده‌ای می‌تواند معادله‌های جبری یا معادله‌های دیفرانسیل معمولی رتبه‌ی اول باشد. لازم به ذکر است چنانچه تعداد معادله‌های حاصل از فرمول‌بندی با توجه به تعداد متغیرهای وابسته مسئله، بیش از یک معادله و به‌ویژه غیرخطی باشند، حل تحلیلی این معادله‌ها مشکل و یا ناممکن بوده و فقط در برخی از موارد با اعمال فرض‌های ساده کننده امکان‌پذیر خواهد بود. به این ترتیب حل دستگاه معادله‌های جبری (خطی یا غیرخطی) و حل دستگاه معادله‌های دیفرانسیل معمولی (خطی یا غیرخطی) توسط روش‌های عددی بیش از پیش اهمیت می‌یابد.

چنانچه معادله‌های جبری حاصل خطی باشند، روش‌های حذفی، روش معکوس ماتریس یا روش‌های حدسی را می‌توان برای حل عددی دستگاه معادله‌ها به کار گرفت. در روش‌های عددی چنانچه معادله‌های جبری حاصل غیرخطی باشند، روش‌های حل عددی پیچیده‌تر شده و تکنیک‌های متفاوتی جهت آماده‌سازی و حل عددی معادله‌ها مطرح می‌شوند.

فصل اول: مقدمه / ۱۵

در مورد حل دستگاه معادله‌های دیفرانسیل معمولی، در صورتی که از نوع مسائل شرط اولیه^۱ باشند، روش‌های عددی تک‌مرحله‌ای^۲ مانند بسط سری تیلور، روش‌های اولر، رانج-کاتا و غیره یا روش‌های عددی چندمرحله‌ای^۳ پیشنهاد می‌شوند.

۱-۲. فرمول‌بندی دیفرانسیلی^۴

در فرمول‌بندی دیفرانسیلی، معادله‌های دیفرانسیل پیچیده‌تری به دست می‌آیند که از فرمول‌بندی متغیر مورد نظر در المانی از حجم کنترل حاصل می‌شوند. در این نوع فرمول‌بندی، تابع یا تابع‌های مورد مطالعه به ابعاد مکانی (حداکثر در سه جهت فضایی) وابسته می‌باشند؛ اگرچه در شرایط ناپایا، تابعیت زمانی نیز امکان‌پذیر است. در این حالت، معادله یا معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای حاصل می‌شوند که معمولاً از نوع شرایط مرزی^۵ بوده و روش‌های مختلف تحلیلی و عددی برای حل آن‌ها پیشنهاد می‌شود.

ساده‌ترین حالت در این نوع فرمول‌بندی هنگامی حاصل می‌شود که فرایند مورد بررسی در شرایط پایا باشد و تابع مورد مطالعه نیز فقط وابسته به یک بعد فضایی باشد، در این صورت از فرمول‌بندی، معادله دیفرانسیل معمولی رتبه‌ی اول یا رتبه‌ی بالاتر حاصل خواهد شد. به عنوان مثال، معادله‌های دیفرانسیل رتبه‌ی اول هنگامی حاصل می‌شوند که قرار باشد مدل حاکم بر واکنشگاه‌های لوله‌ای در شرایط ایده‌آل (جریان پیستونی) فرمول‌بندی شود، در حالی که معادله‌های دیفرانسیل رتبه‌ی دوم با شرایط مرزی در هنگام فرمول‌بندی واکنشگاه‌های لوله‌ای همراه با پراکندگی محوری حاصل می‌شود. برای حل معادله‌های دیفرانسیل با شرایط مرزی با توجه به خطی یا غیرخطی بودن معادله‌ها، روش‌های مختلفی به کار گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که تعدادی از مسائل مهندسی در زمینه‌ی لایه‌های مرزی و انتقال اندازه حرکت در این لایه‌ها می‌باشند که فرمول‌بندی آن‌ها به معادله‌های دیفرانسیل رتبه‌ی سوم غیرخطی منتهی می‌شود و معمولاً از نوع مسائل شرط مرزی بوده و حل آن‌ها به روش‌های عددی حائز اهمیت است.

در شرایط پیچیده‌تر در مدل‌سازی‌های دیفرانسیلی هرگاه فرایند بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای مطرح می‌شوند که در این معادله‌ها، متغیر وابسته تابع ابعاد فضایی و یا زمانی است. به طور کلی معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای به سه دسته معادله‌های

-
1. Initial Value Problem
 2. Single-Step
 3. Multi-Step
 4. Differential Formulation
 5. Boundary Value Problem