

حل تمرینات درس شبکه عصبی

نام استاد:

جناب آقای دکتر منهاج

1-1- آیا یک نرون در یک شبکه عصبی حامل اطلاعات مشخصی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، کاملاً توضیح دهید. این بدین معناست که از کدامیک از خواص شبکه های عصبی می توان جواب سوال را استخراج کرد؟

خیر، اطلاعات در شبکه های عصبی در سیناپس ها ذخیره می گردد و هر نرون در شبکه به صورت بالقوه از کل فعالیت سایر نرون ها متأثر می شود. در نتیجه اطلاعات از نوع مجزا از هم نبوده بلکه متأثر از کل شبکه می باشد.

1-2- دانش در چهارچوب شبکه های عصبی چگونه شکل می گیرد و در این راستا معادل بودن دو شبکه عصبی را چگونه می توان فرمولبندی کرد؟

آنچه شبکه فرا می گیرد اطلاعات یا دانش در وزن های سیناپسی مستقر است. رابطه یک به یک بین ورودی ها و وزن های سیناپسی وجود ندارد. می توان گفت که هر وزن سیناپسی مربوط به همه ورودی هاست ولی به هیچیک از آنها به صورت منفرد و مجزا مربوط نیست. به عبارت دیگر هر نرون در شبکه، از کل فعالیت سایر نرون ها متأثر می شود. در نتیجه اطلاعات به صورت متن توسط شبکه های عصبی پردازش می شوند.

1-3- در ارتباط با سوال قبلی توانایی یادگیری، به خاطر آوردن و تعمیم شبکه های عصبی چگونه

توجیه می شود؟

قابلیت یادگیری یعنی توانایی تنظیم پارامترهای شبکه (وزن سیناپسها) در مسیر زمان که شبکه تغییر می کند و شرایط جدید را تجربه می کند. با این هدف که اگر شبکه برای یک وضعیت خاص آموزش دید و تغییر کوچکی در شرایط محیطی آن رخ داد شبکه بتواند با آموزش مختصر برای شرایط جدید نیز کارا باشد. قابلیت تعمیم یعنی این که پس از آنکه شبکه آموزش دیده شد شبکه بتواند در مقابل یک ورودی آموزش داده نشده و یک خروجی مناسب ارائه نماید. این خروجی براساس مکانیسم تعمیم که همانا چیزی جز فرآیند درون یابی نیست به دست می آید. و به عبارت روشنتر شبکه تابع مورد نظر را یاد می گیرد، الگوریتم را می آموزد و یا رابطه تحلیل مناسبی را برای تعدادی نقاط در فضا به دست می آورد.

1-4- سیناپس تحریکی و ممانعتی به چه معناست و چگونه تعریف می شود؟

انتقال دهنده نرونی پس از نفوذ در سیناپسها، گیرنده های سلولهای مجاور را فعال می کند. انتقال دهنده های نرونی پیام ها مختلفی را مخابره می کنند. بعضی از این پیامها تشدید می و بعضی دیگر بازدارنده نامیده می شوند. پیام های تشدید می موجب تحریک سریعتر ایمپالسهای عصبی می شوند و نرخ ایجاد ایمپالسها بالا می رود. پیام های بازدارنده موجب تحریک کمتر ایمپالسهای عصبی می گردند.

2-1- توابع تبدیل نرونی را برای حالات زیر فرمولبندی نمایید:

الف- تابع درجه دوم (Quadratic)

ب- تابع کروی (Spherical)

ج- تابع چند جمله ای

الف- تابع درجه دوم (Quadratic)

$$f_i = \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j^2 - \theta_i$$

ب- تابع کروی (Spherical)

$$f_i = p^{-2} \sum_{j=1}^m (x_j - w_{ij})^2 - \theta_i$$

ج- تابع چند جمله ای

$$f_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m w_{ijk} x_j x_k + x_j^{\alpha_j} + x_k^{\alpha_k} - \theta_i$$

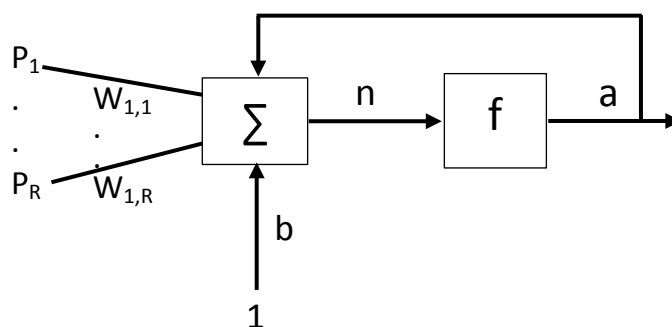
2-2- با استفاده از نمایش نرونی ارائه شده در فصل 2، ساختارهای شبکه عصبی زیر را رسم کنید.

الف- شبکه عصبی تک نرونی با فیدبک به خود

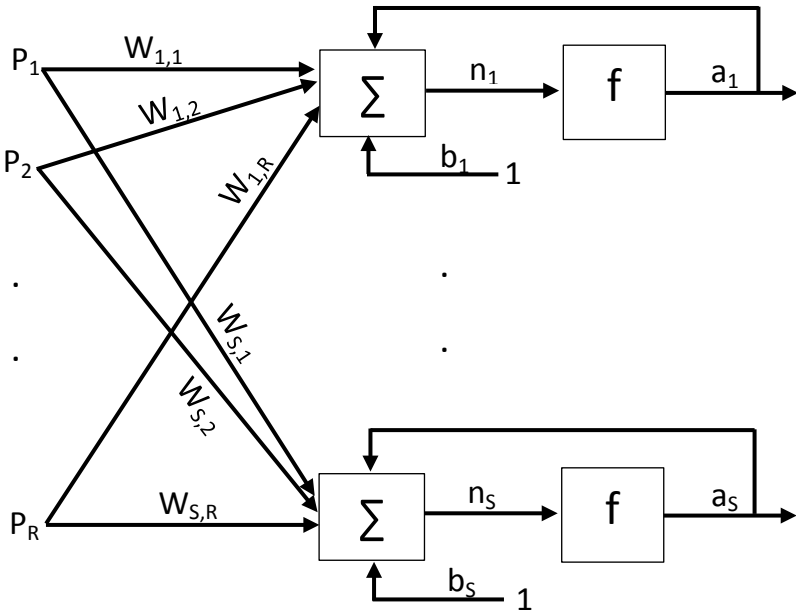
ب- شبکه عصبی تک لایه با فیدبک

ج- شبکه عصبی چندلایه با فیدبک

الف- شبکه عصبی تک نرونی با فیدبک به خود



ب- شبکه عصبی تک لایه با فیدبک



$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الگوهای } 1-3 \text{ فرض کنید کارخانه ای قصد بر جدا کردن دو میوه با الگوهای}$$

را از هم دارد.

الف- شبکه پرسپترون برای تشخیص این الگوها طراحی کنید.

ب- شبکه همینگ برای این منظور طراحی کنید.

ج- شبکه هاپفیلد برای جدا کردن این الگوها طراحی کنید.

الف) ابتدا بایستس کاهش ابعاد صورت گیرد. زیرا در هر دو میوه ها عنصر سوم 1 است و این تاثیری ندارد و

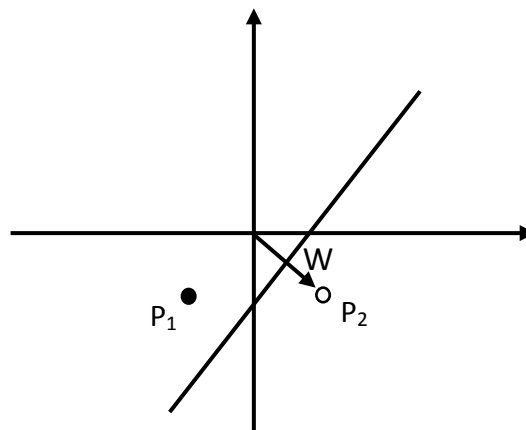
باید حذف شود. پس الگوهای جدید به صورت زیر تغییر می یابد.

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

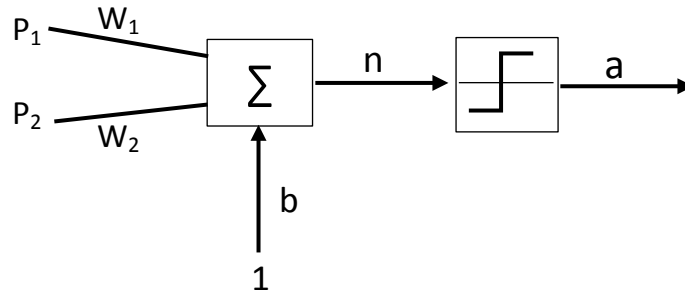
$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چون دارای دو الگو هستیم می توانیم از یک شبکه پرسپترون تک لایه با یک نرون استفاده کنیم. شکل زیر

موقعیت الگوها در فضا و نحوه جداسازی آنها را نشان می دهد.



شکل شبکه به صورت زیر می باشد:



مقادیر وزن ها نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_2 = mP_1 + n \Rightarrow 0 = m + n \Rightarrow m = 1$$

$$P_2 = mP_1 + n \Rightarrow -1 = n$$

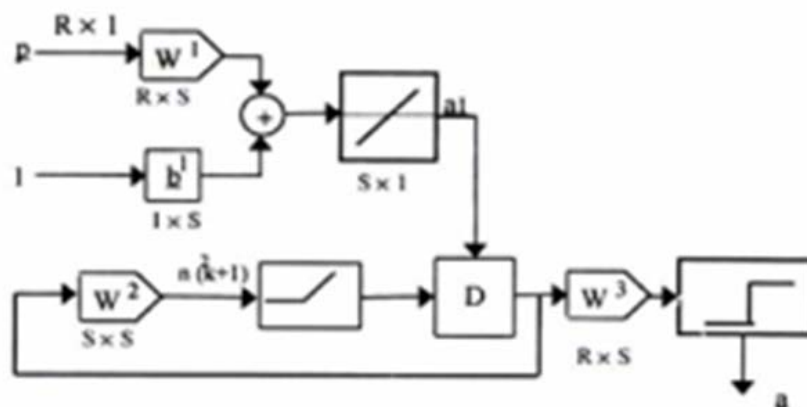
$$P_2 = P_1 - 1 \Rightarrow P_1 - P_2 - 1 = wP_1 + wP_2 + b$$

$$\Rightarrow w_1 = 1 \quad w_2 = -1 \quad b = -1$$

$$a = \text{ssign}(wp + b) = \text{ssign}\left([1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)\right) = \text{ssign}(-1) = -1$$

$$a = \text{ssign}(wp + b) = \text{ssign}\left([1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)\right) = \text{ssign}(+1) = +1$$

(ب)



تنظیم پارامترهای شبکه همینک به صورت زیر می باشد:

$$w^1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a^2(0) = a^1 = w^1 p + b^1 = \begin{bmatrix} [-1 & -1] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \\ [1 & -1] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$w^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2(1) = Posl(w^2 a^2(0)) = Posl\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = Posl\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2(2) = Posl(w^2 a^2(1)) = Posl\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = Posl\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^3 = SSIGN(w^3 a^2) = SSIGN\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = SSIGN\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a^2(0) = a^1 = w^1 p + b^1 = \begin{bmatrix} [-1 & -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \\ [1 & -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

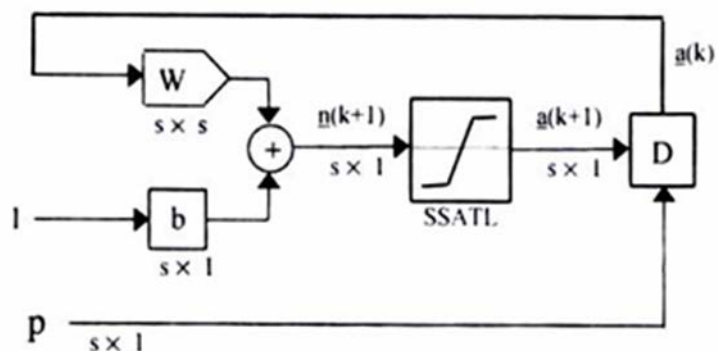
$$w^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2(1) = Posl(w^2 a^2(0)) = Posl\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = Posl\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a^2(2) = Posl(w^2 a^2(1)) = Posl\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = Posl\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a^3 = SSign(w^3 a^2) = SSign\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = SSign\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(ج)



تنظیم پارامترهای شبکه هاپفیلد به صورت زیر می باشد:

برای الگوی اول:

$$a(1) = SSatl \left(\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow a(1) = SSatl \left(\begin{bmatrix} -1.2 \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right) = SSatl \left(\begin{bmatrix} -1.1 \\ -1.3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

برای الگوی دوم:

$$a(1) = SSatl \left(\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow a(1) = SSatl \left(\begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right) = SSatl \left(\begin{bmatrix} 1.3 \\ -1.3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3-2- الگوهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\{P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t = 1\}$$

$$\{P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t = 1\}$$

$$\{P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t = 1\}$$

$$\{P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t = 0\}$$

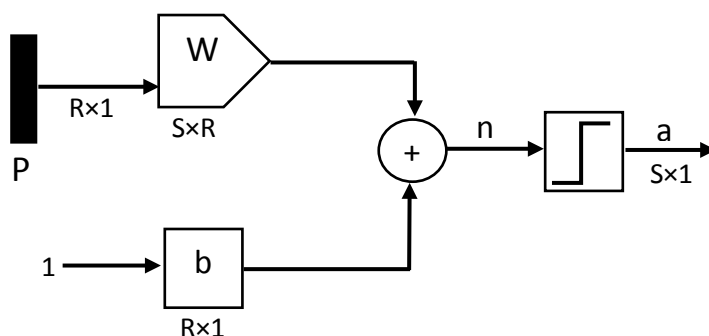
$$\{P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t = 1\}$$

دیاگرام شبکه پرسپترون تک لایه را رسم کرده و شبکه را برای جدا کردن الگوها طراحی کنید.

$$A^2 = \text{Sign}(V^2 \cdot Q) = \text{Sign}\left([-1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2]) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \Rightarrow w = [-1 \quad -1], b = 0$$



4-1- الگوهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\{P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1 = 1\}$$

$$\{P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t_2 = 1\}$$

$$\{P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t_3 = 1\}$$

$$\{P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_4 = 0\}$$

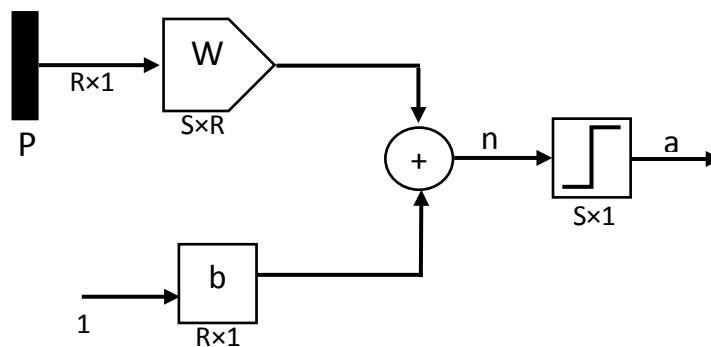
$$\{P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_5 = 0\}$$

$$\left\{ P_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \\ -\varepsilon \end{bmatrix}, t_6 = 0 \right\}$$

الف - دیاگرام شبکه پرسپترون تک لایه را رسم کرده و شبکه را برای جدا کردن الگوها طراحی کنید. ε را برابر 1 در نظر بگیرید.

ب - برای حالتی که $\varepsilon=2$ و $\varepsilon=6$ و $\varepsilon=12$ روی عملکرد الگوریتم بحث نمایید.

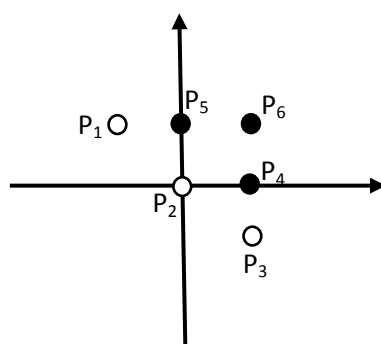
دیاگرام شبکه پرسپترون تک لایه به صورت زیر می باشد:



در حالتی که $\varepsilon=1$ باشد الگوی P_6 به صورت زیر می شود:

$$\{P_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t_6 = 0\}$$

شکل زیر نحوه قرار گیری الگوها در فضا را نشان می دهد:



پارامترهای شبکه به صورت زیر می باشد:

$$S = 1 \quad R = 2 \quad L = 6$$

$$T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [w_1 \quad w_2 \quad b]$$

اگر $w_1=0$ و $w_2=0$ و $b=0$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$V(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A^0 = \text{Sign}(V(0)Q) = \text{Sign}\left([0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

$$V(1) = V(0) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(1) = [0 \quad 0 \quad 0] + \frac{1}{2} \left([0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(1) = [-1 \quad -1 \quad -1.5]$$

تکرار دوم:

$$A^1 = \text{Sign}(V(1)Q) = \text{Sign} \left([-1 \quad -1 \quad -1.5] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Sign}([-1.5 \quad -1.5 \quad -1.5 \quad -2.5 \quad -2.5 \quad -3.5])$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$V(2) = V(1) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(2) = [-1 \quad -1 \quad -1.5] + \frac{1}{2} \left([1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(2) = [-1 \quad -1 \quad 0]$$

تکرار سوم:

$$A^2 = \text{Sign}(V(2)Q) = \text{Sign}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2])$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

مقدار خطا برابر صفر شده است پس دیگر نیازی به تکرار الگوریتم نیست. مقادیر نهایی پارامترها در حالتی که

$\varepsilon=1$ باشد به صورت زیر می باشد:

$$w_1 = -1 \quad w_2 = -1 \quad b = 0$$

در حالتی که $\varepsilon=2$ باشد الگوی P_6 به صورت زیر می شود:

$$\{P_6 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, t_6 = 0\}$$

پارامترهای شبکه به صورت زیر می باشد:

$$S = 1 \quad R = 2 \quad L = 6$$

$$T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [w_1 \quad w_2 \quad b]$$

اگر $w_1=0$ و $w_2=0$ و $b=0$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$V(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A^0 = \text{Sign}(V(0)Q) = \text{Sign}\left([0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

$$V(1) = V(0) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(1) = [0 \quad 0 \quad 0] + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$V(1) = [-0.75 \quad -0.75 \quad -1.5]$$

تکرار دوم:

$$\begin{aligned}
A^1 &= \text{Sign}(V(1)Q) \\
&= \text{Sign}\left([-0.75 \quad -0.75 \quad -1.5] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \text{Sign}([-1.5 \quad -1.5 \quad -1.5 \quad -2.25 \quad -2.25 \quad -2.25]) \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
E = T - A &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
&= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
V(2) &= V(1) + \frac{1}{2}EQ^T \\
V(2) &= [-0.75 \quad -0.75 \quad -1.5] + \frac{1}{2} \left([1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
V(2) &= [-0.75 \quad -0.75 \quad 0]
\end{aligned}$$

تکرار سوم:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \text{Sign}(V(2)Q) = \text{Sign}\left([-0.75 \quad -0.75 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.75 \quad -0.75 \quad -0.75]) \\
&= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
E = T - A &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
\end{aligned}$$

مقدار خطا برابر صفر شده است پس دیگر نیازی به تکرار الگوریتم نیست. مقادیر نهایی پارامترها در حالتی که

$\epsilon=2$ باشد به صورت زیر می باشد:

$$w_1 = -0.75 \quad w_2 = -0.75 \quad b = 0$$

در حالتی که $\varepsilon=6$ باشد الگوی P_6 به صورت زیر می شود:

$$\{P_6 = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.16 \end{bmatrix}, t_6 = 0\}$$

پارامترهای شبکه به صورت زیر می باشد:

$$S = 1 \quad R = 2 \quad L = 6$$

$$T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.16 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [w_1 \quad w_2 \quad b]$$

اگر $w_1=0$ و $w_2=0$ و $b=0$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$V(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A^0 = \text{Sign}(V(0)Q) = \text{Sign}\left([0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.16 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

$$V(1) = V(0) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(1) = [0 \quad 0 \quad 0] + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.16 & 0.16 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(1) = [-0.58 \quad -0.58 \quad -1.5]$$

تکرار دوم:

$$A^1 = \text{Sign}(V(1)Q)$$

$$= \text{Sign}\left([-0.58 \quad -0.58 \quad -1.5] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.16 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([-1.5 \quad -1.5 \quad -1.5 \quad -2.08 \quad -2.08 \quad -1.68])$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$V(2) = V(1) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(2) = [-0.58 \quad -0.58 \quad -1.5]$$

$$+ \frac{1}{2} \left([1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.16 & 0.16 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(2) = [-0.58 \quad -0.58 \quad 0]$$

تکرار سوم:

$$A^2 = \text{Sign}(V(2)Q)$$

$$= \text{Sign}\left([-0.58 \quad -0.58 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.16 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.58 \quad -0.58 \quad -0.185])$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقدار خطا برابر صفر شده است پس دیگر نیازی به تکرار الگوریتم نیست. مقادیر نهایی پارامترها در حالتی که

$\epsilon=6$ باشد به صورت زیر می باشد:

$$w_1 = -0.58 \quad w_2 = -0.58 \quad b = 0$$

در حالتی که $\varepsilon=12$ باشد الگوی P_6 به صورت زیر می شود:

$$\{P_6 = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.08 \end{bmatrix}, t_6 = 0\}$$

پارامترهای شبکه به صورت زیر می باشد:

$$S = 1 \quad R = 2 \quad L = 6$$

$$T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.08 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.08 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [w_1 \quad w_2 \quad b]$$

اگر $w_1=0$ و $w_2=0$ و $b=0$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$V(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A^0 = \text{Sign}(V(0)Q) = \text{Sign}\left([0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.08 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.08 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

$$V(1) = V(0) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(1) = [0 \quad 0 \quad 0] + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.08 & 0.08 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(1) = [-0.54 \quad -0.54 \quad -1.5]$$

تکرار دوم:

$$A^1 = \text{Sign}(V(1)Q)$$

$$= \text{Sign}\left([-0.54 \quad -0.54 \quad -1.5] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.08 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.08 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([-1.5 \quad -1.5 \quad -1.5 \quad -2.04 \quad -2.04 \quad -1.58])$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$V(2) = V(1) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(2) = [-0.54 \quad -0.54 \quad -1.5]$$

$$+ \frac{1}{2} \left([1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.08 & 0.08 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(2) = [-0.54 \quad -0.54 \quad 0]$$

تکرار سوم:

$$A^2 = \text{Sign}(V(2)Q)$$

$$= \text{Sign}\left([-0.54 \quad -0.54 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.08 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0.08 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.54 \quad -0.54 \quad -0.864])$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقدار خطا برابر صفر شده است پس دیگر نیازی به تکرار الگوریتم نیست. مقادیر نهایی پارامترها در حالتی که

$\epsilon=12$ باشد به صورت زیر می باشد:

$$w_1 = -0.54 \quad w_2 = -0.54 \quad b = 0$$

4-2- الگوهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\{P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, t_1 = 1\}$$

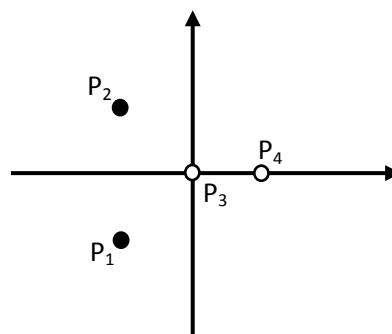
$$\{P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t_2 = 1\}$$

$$\{P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t_3 = 0\}$$

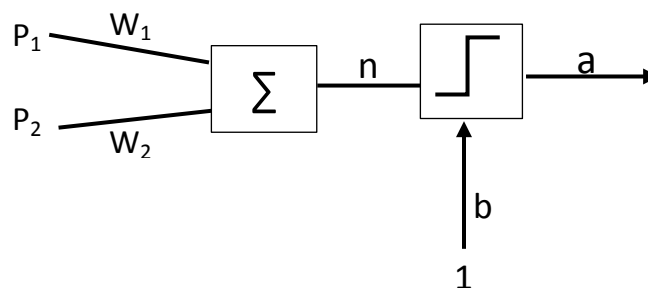
$$\{P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_4 = 0\}$$

الف - شبکه پرسپترون تک لایه را برای تشخیص این الگوها طراحی کنید.

الف - نحوه قرار گیری الگوها در صفحه مختصات به صورت زیر می باشد:



دیاگرام شبکه برای شناسایی الگوها به صورت زیر می باشد:



برای شناسایی الگوها مقادیر پارامترها می تواند به صورت زیر باشد:

$$w_1 = -1 \quad w_2 = 0 \quad b = -0.5$$

برای الگوی P_1 :

$$a = \text{Sign}(\underline{w} \underline{P}_1 + b) = \text{Sign}\left([-1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 0.5\right) = \text{Sign}(0.5) = 1$$

برای الگوی P_2 :

$$a = \text{Sign}(\underline{w} \underline{P}_2 + b) = \text{Sign}\left([-1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.5\right) = \text{Sign}(0.5) = 1$$

برای الگوی P_3 :

$$a = \text{Sign}(\underline{w} \underline{P}_3 + b) = \text{Sign}\left([-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.5\right) = \text{Sign}(-0.5) = 0$$

برای الگوی P_4 :

$$a = \text{Sign}(\underline{w} \underline{P}_4 + b) = \text{Sign}\left([-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.5\right) = \text{Sign}(-1.5) = 0$$

همانطور که در بالا مشاهده شد شبکه قادر به شناسایی تمامی الگوهای ورودی می باشد.

ب - مسئله فوق را از طریق قانون پرسپترون و با شرایط اولیه صفر حل کنید.

پارامترهای شبکه به صورت زیر می باشد:

$$S = 1 \quad R = 2 \quad L = 4$$

$$T = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [w_1 \quad w_2 \quad b]$$

اگر $w_1=0$ و $w_2=0$ و $b=0$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$V(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A^0 = \text{Sign}(V(0)Q) = \text{Sign}\left([0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$= [0 \quad 0 \quad -1 \quad -1]$$

$$V(1) = V(0) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(1) = [0 \quad 0 \quad 0] + \frac{1}{2} \left([0 \quad 0 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(1) = [-0.5 \quad 0 \quad -1]$$

تکرار دوم:

$$A^1 = \text{Sign}(V(1)Q) = \text{Sign}\left([-0.5 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([-0.5 \quad -0.5 \quad -1 \quad -1.5])$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$V(2) = V(1) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(2) = [-0.5 \quad 0 \quad -1] + \frac{1}{2}\left([1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$V(2) = [-1.5 \quad 0 \quad 0]$$

تکرار سوم:

$$A^2 = \text{Sign}(V(2)Q) = \text{Sign}\left([-1.5 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Sign}([1.5 \quad 1.5 \quad 0 \quad -1.5])$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

$$= [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$$

$$V(3) = V(2) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(3) == [-1.5 \quad 0 \quad 0] + \frac{1}{2} \left([0 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(3) = [-1.5 \quad 0 \quad -0.5]$$

تکرار چهارم:

$$A^3 = \text{Sign}(V(3)Q) = \text{Sign} \left([-1.5 \quad 0 \quad -0.5] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Sign}([1 \quad 1 \quad -0.5 \quad -2])$$

$$= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

مقدار خطا برابر صفر شده است پس دیگر نیازی به تکرار الگوریتم نیست. مقادیر نهایی پارامترها به صورت زیر

می باشد:

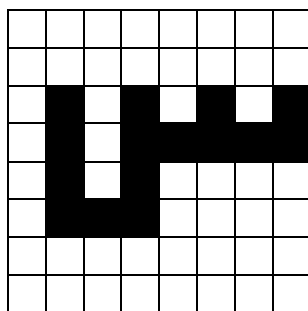
$$w_1 = -1.5 \quad w_2 = 0 \quad b = -0.5$$

4-3- شبکه پرسپترون تک لایه برای تشخیص الگوهای سوال تحقیقی فصل 3 طراحی کنید و روی نتایج آن کاملاً بحث کنید.

در سوال تحقیقی فصل 3 هدف جداسازی الگوهای س، ج، گ می باشد. برای بدست آوردن ویژگی های این الگوها ابتدا آنها را در قاب زیر در نظر می گیریم.

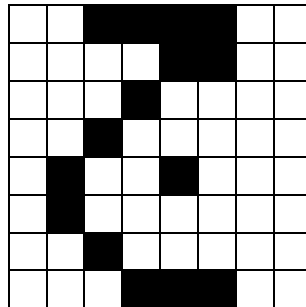
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

با قرار گیری الگوها در قاب بالا، نمایش الگوها به صورت زیر می باشد:



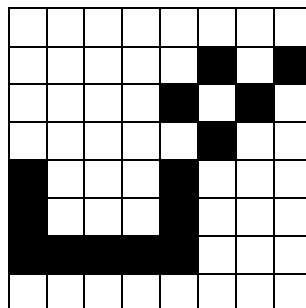
الگوی س برابر است با:

$$[000000000000000000001010101010111110101000001110000000000000000000]^T$$



الگوی ج برابر است با:

$[0011110000001100000100000010000001001000010000000010000000011100]^T$



الگوی گ برابر است با:

$[00000000000000101000010100000010010001000100010001111100000000000]^T$

در این مرحله بایستی کاهش ابعاد صورت گیرد. بدین منظور پیکسلهایی که برای هر سه الگو دارای یک مقدار هستند را حذف می کنیم زیرا این پیکسلها تاثیری در تصمیم گیری ندارند.

بعد از حذف پیکسلهای بی اثر، مقادیر الگوها به صورت زیر می باشد:

الگوی س برابر است با:

$[000000011010110111110110011100000000]^T$

الگوی ج برابر است با:

$[1111110010000010000001010100000100111]^T$

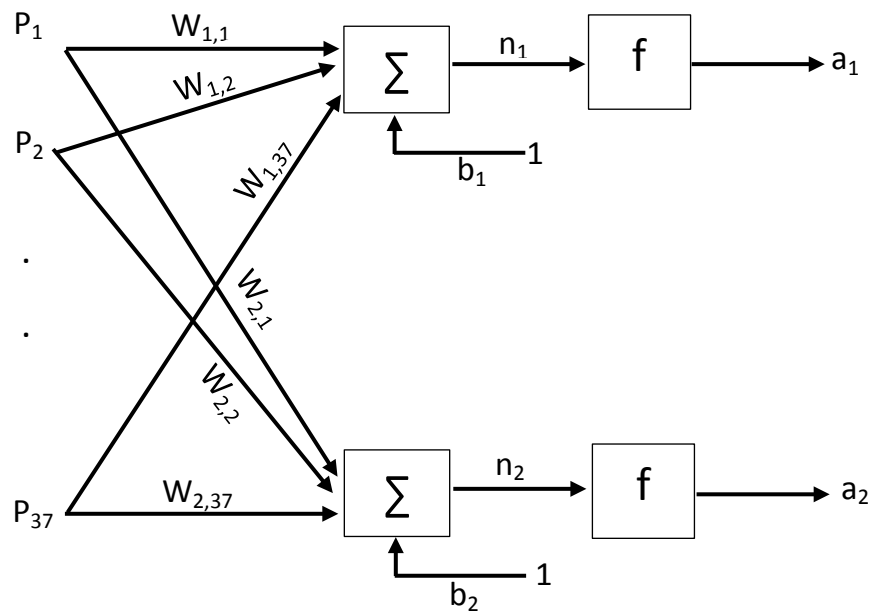
الگوی گ برابر است با:

$[0000011001010000010010011000111111000]^T$

پس هر الگو دارای 37 ویژگی می باشد. برای جداسازی الگوهای فوق به یک شبکه پرسپترون تک لایه با 37

عنصر در بردار ورودی و 2 نرون نیاز داریم.

نمایش شبکه برای شناسایی الگوهای بالا به صورت زیر می باشد:



4-4 برای دو تمرین اول، جهت بیان عملکرد شبکه از شاخص های زیر استفاده کنید:

$$F_1 = \sum_{l=1}^{n_p} |a(l) - t(l)| \quad -1$$

$$F_2 = \sum_{l=1}^{n_p} |a(l) - t(l)| n(l) \quad -2$$

جائیکه n_p تعداد الگوها و $n(l)$ ورودی خالص می باشد. کدامیک جهت بیان عملکرد شبکه تک لایه مناسبتر است؟

در دو تمرین اول به علت اینکه شبکه به خوبی آموزش داده می شود و تمام الگوها را به درستی جدا می کند در نتیجه خروجی شبکه برابر هدف می باشد و میزان خطا برابر صفر است در نتیجه در هر دو شاخص ذکر شده مقدار خروجی منهای هدف برابر صفر می باشد و حاصل جمع صفرها نیز برابر صفر خواهد شد. پس هر دو شاخص مقدار صفر را بر می گردانند و نتیجه هر دو شاخص با هم برابر است و برابر با صفر است. اگر بخواهیم میزان عملکرد شبکه را کمتر بودن مقدار دو شاخص بالا در نظر بگیریم هر دو شاخص برای بیان عملکرد شبکه مفید می باشند زیرا در دو تمرین اول میزان خطا صفر شده است و شبکه کاملاً به درستی عمل می کند و مقادیر این دو شاخص نیز برای شبکه مقدار صفر شده است و کمترین مقدار است.

7-1- الگوهای زیر را در نظر بگیرید.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{طبقه اول}$$

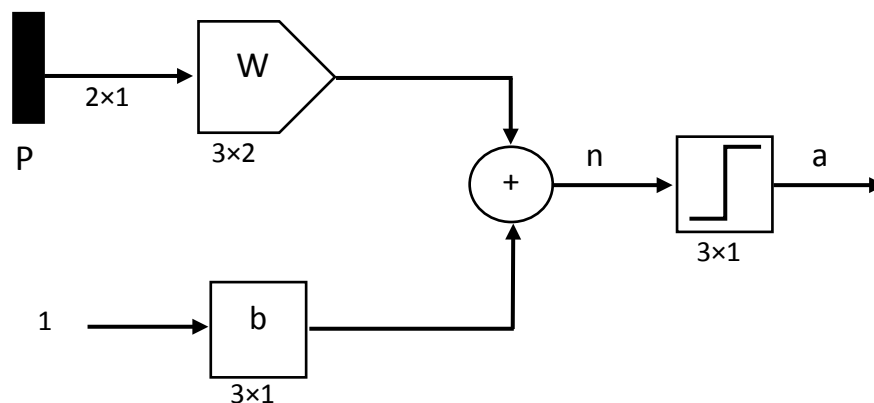
$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{طبقه دوم}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{طبقه سوم}$$

الف) شبکه پرسپترون تک لایه با سه نرون طراحی کنید که الگوهای فوق را از هم جدا نماید.

ب) شبکه آدلاین با سه نرون جهت جداسازی الگوهای فوق طراحی کنید.

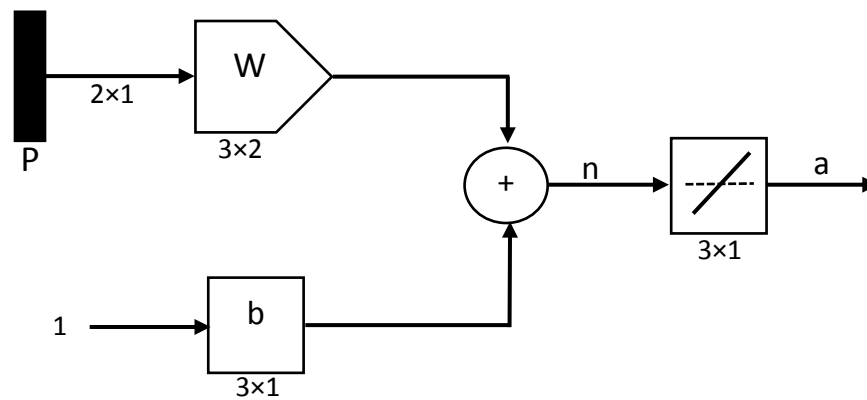
الف) دیاگرام شبکه پرسپترون تک لایه به صورت زیر می باشد:



مقادیر بردار وزن و بردار بایاس به صورت زیر می باشد:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) دیاگرام شبکه آدلاین به صورت زیر می باشد:

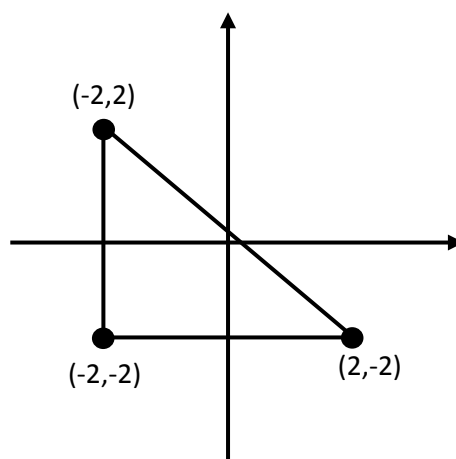


مقادیر بردار وزن و بردار بایاس به صورت زیر می باشد:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7-2- شبکه عصبی تک لایه طراحی کنید که تمامی نقاط داخل مثلث با رئوس $(-2,2)$ و $(-2,-2)$ و $(2,-2)$ را از نقاط خارج مثلث جدا نماید.

فضای ورودی به صورت زیر می باشد:



مقادیر بردار وزن و بردار بایاس برای شبکه پرسپترون تک لایه به صورت زیر می باشد:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

البته این شبکه برای نقاط موجود داخل مثلث جواب یکسان و برای نقاط خارج از مثلث جوابهای متفاوتی می دهد. برای اینکه شبکه برای نقاط داخل یک مقدار و برای نقاط خارج از مثلث نیز مقادیر یکسان برگرداند نیاز است که از یک شبکه پرسپترون دو لایه استفاده شود که لایه دوم در این شبکه همانند عملگر AND عمل می کند.

7-3- الگوهای زیر را در نظر بگیرید.

$$P_1 = [1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$$

$$P_2 = [-1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$$

$$P_3 = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$P_4 = [1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1]^T$$

$$P_5 = [-1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$$

$$P_6 = [-1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1]^T$$

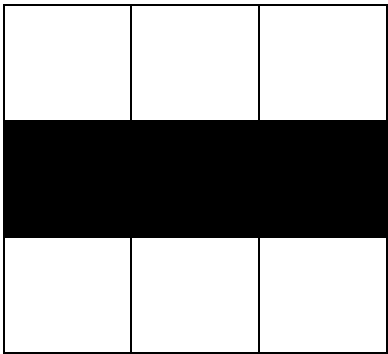
الف) الگوهای فوق را به شکل تصویر با اندازه 3×3 نمایش دهید (توجه کنید 1 معرف رنگ سیاه و -1 معرف سفید می باشد).

ب) شبکه عصبی پرسپترون تک لایه طراحی کنید که الگوهای فوق را از هم جدا نماید.

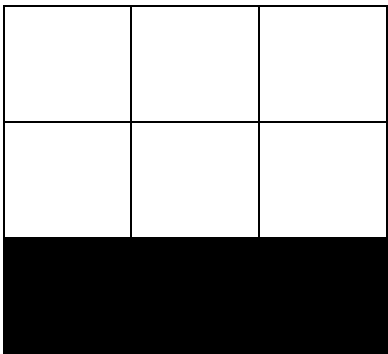
الف)

الگوی P_1 به صورت زیر می باشد:

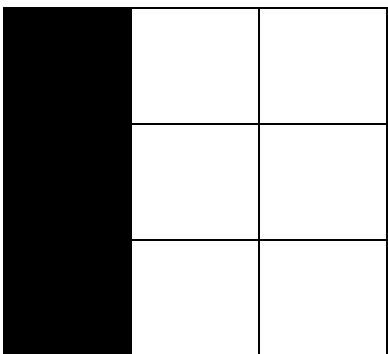
الگوی P_2 به صورت زیر می باشد:



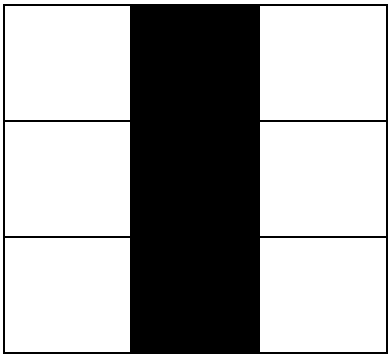
الگوی P_3 به صورت زیر می باشد:



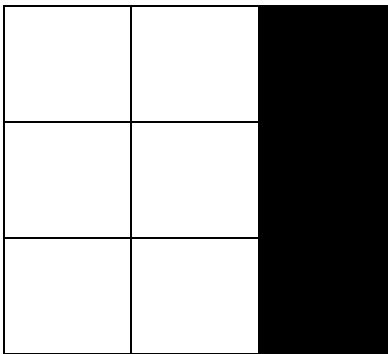
الگوی P_4 به صورت زیر می باشد:



الگوی P_5 به صورت زیر می باشد:

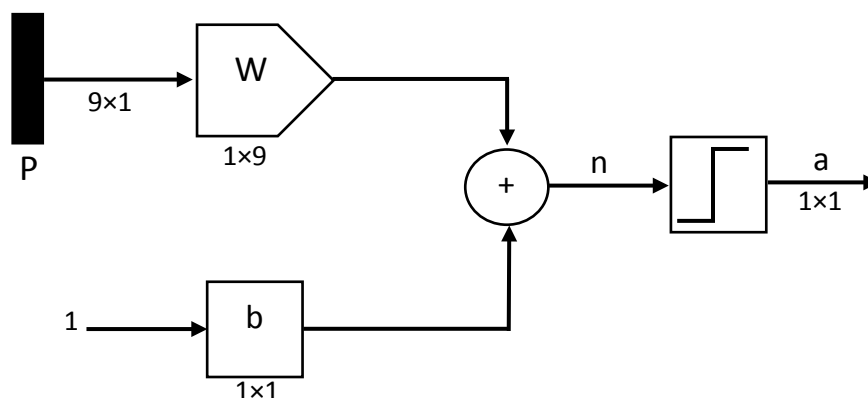


الگوی P_6 به صورت زیر می باشد:



ب) شبکه عصبی پرسپترون تک لایه طراحی کنید که الگوهای فوق را از هم جدا نماید.

در این مثال نیاز به یک شبکه پرسپترون تک لایه با یک نرون می باشد. دیاگرام شبکه به صورت زیر می باشد:



پارامترهای شبکه به صورت زیر می باشد:

$$S = 1 \quad R = 9 \quad L = 6$$

$$T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8 \quad w_9 \quad b]$$

اگر $w_1=0$ و $w_2=0$ و $b=0$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$V(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A^0 = \text{Sign}(V(0)Q)$$

$$= \text{Sign} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Sign}([0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$E = T - A = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] - [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1]$$

$$V(1) = V(0) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(1)$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(1) = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ -1.5]$$

تکرار دوم:

$$A^1 = \text{Sign}(V(1)Q)$$

$$= \text{Sign} \left(\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Sign}([-3 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \quad -3])$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$E = T - A = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$V(2) = V(1) + \frac{1}{2}EQ^T$$

$$V(2)$$

$$= [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad -1.5]$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$V(2) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

تکرار سوم:

$$A^2 = \text{Sign}(V(2)Q)$$

$$= \text{Sign} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Sign}([0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0])$$

$$= [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$E = T - A = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] - [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1]$$

همانطور که مشخص است نمی توان با استفاده از یک شبکه پرسپترون تک لایه با یک نرون الگوهای موردنظر

را از هم جدا کرد.

8-1- الگوهای مسئله 3-7 را در نظر بگیرید. شبکه مادالاین برای تشخیص این الگوها طراحی کنید.

طبق مثال 3-7 الگوهای ورودی به صورت زیر می باشد:

$$P_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]^T$$

$$P_2 = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]^T$$

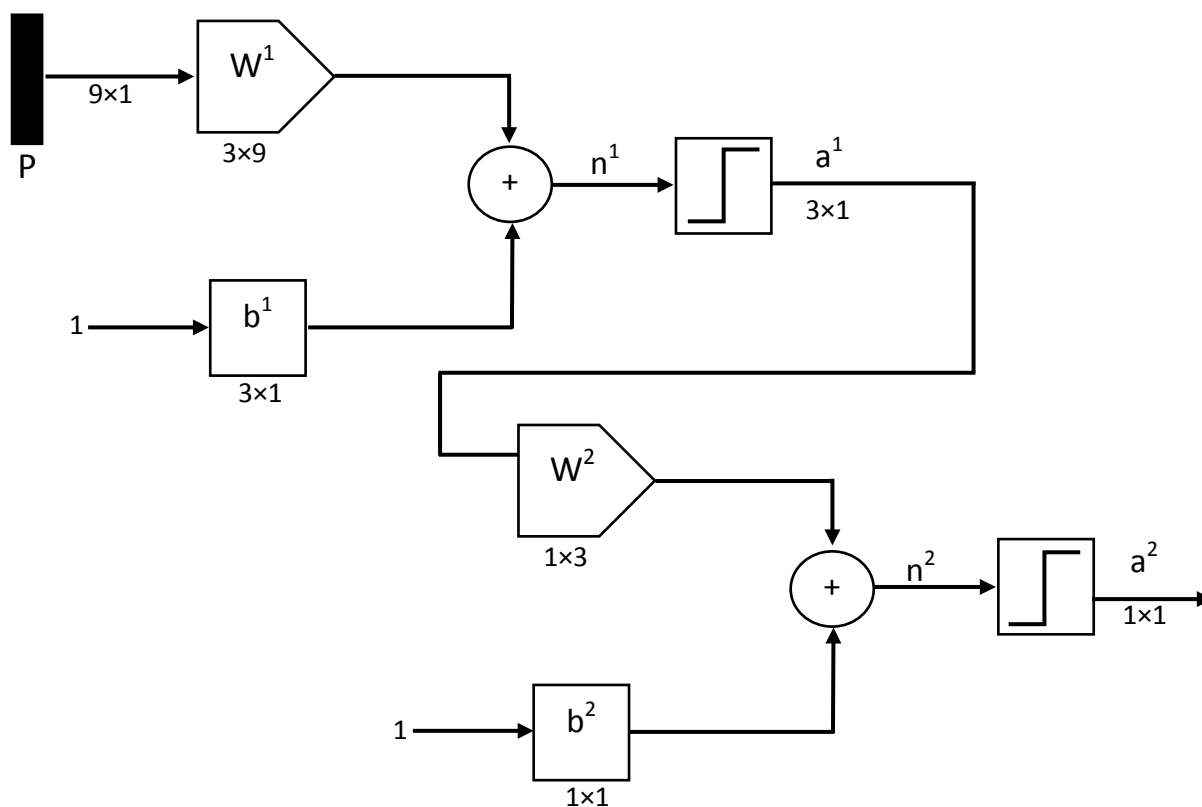
$$P_3 = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$P_4 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]^T$$

$$P_5 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$P_6 = [-1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T$$

دیاگرام شبکه مادالاین جدا سازی الگوهای فوق به صورت زیر می باشد:



همانطور که از شکل مشخص است برای جدا سازی الگوهای فوق نیاز به 3 نرون در لایه اول و 1 نرون در لایه

دوم داریم. مقادیر وزنهای و بایاس به صورت زیر می باشد:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$w^2 = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$b^2 = -0.5$$

برای الگوی P_1 :

$$a^1 = \text{sign}(w^1 P_1 + b^1)$$

$$a^1 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$a^1 = \text{sign} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \text{sign}(w^2 a^1 + b^2)$$

$$a^2 = \text{sign} \left([1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-0.5) \right)$$

$$a^2 = \text{sign}(0.5) = 1$$

برای الگوی P_2 :

$$a^1 = \text{sign}(w^1 P_2 + b^1)$$

$$a^1 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$a^1 = \text{sign} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \text{sign}(w^2 a^1 + b^2)$$

$$a^2 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-0.5) \right)$$

$$a^2 = \text{sign}(0.5) = 1$$

برای الگوی P_3 :

$$a^1 = \text{sign}(w^1 P_3 + b^1)$$

$$a^1 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$a^1 = \text{sign} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \text{sign}(w^2 a^1 + b^2)$$

$$a^2 = \text{sign}\left([1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-0.5)\right)$$

$$a^2 = \text{sign}(0.5) = 1$$

برای الگوی P_4 :

$$a^1 = \text{sign}(w^1 P_4 + b^1)$$

$$a^1 = \text{sign}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$a^1 = \text{sign} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \text{sign}(w^2 a^1 + b^2)$$

$$a^2 = \text{sign}\left([1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-0.5)\right)$$

$$a^2 = \text{sign}(-0.5) = 0$$

برای الگوی P_5 :

$$a^1 = \text{sign}(w^1 P_5 + b^1)$$

$$a^1 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$a^1 = \text{sign} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \text{sign}(w^2 a^1 + b^2)$$

$$a^2 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-0.5) \right)$$

$$a^2 = \text{sign}(-0.5) = 0$$

برای الگوی P_6 :

$$a^1 = \text{sign}(w^1 P_6 + b^1)$$

$$a^1 = \text{sign} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$a^1 = \text{sign} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \text{sign}(w^2 a^1 + b^2)$$

$$a^2 = \text{sign}\left([1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-0.5)\right)$$

$$a^2 = \text{sign}(-0.5) = 0$$

8-8- برای یک شبکه عصبی تک لایه با ورودی های متعلق به R^2 که فضای ورودی را به m

ناحیه مجزا تقسیم می کند تعداد حداقل نرون های لایه مخفی را محاسبه کنید.

یک شبکه عصبی با n نرون فضای ورودی را به 2^n ناحیه تقسیم می کند. حال برای اینکه فضای ورودی به m

ناحیه تقسیم شود بایستی تعداد نرون برابر باشد با:

$$2^n = m \Rightarrow n = \log_2 m$$

3-8- شبکه مادالاین با قوانین MR-1 و MR-2 و MR-3 را برای مسئله XOR طراحی کنید و

روند همگرایی و عملکرد شبکه را با حالتیکه قانون BP استفاده شود مقایسه نمایید.

برای مسئله XOR الگوها و هدف به صورت زیر می باشد:

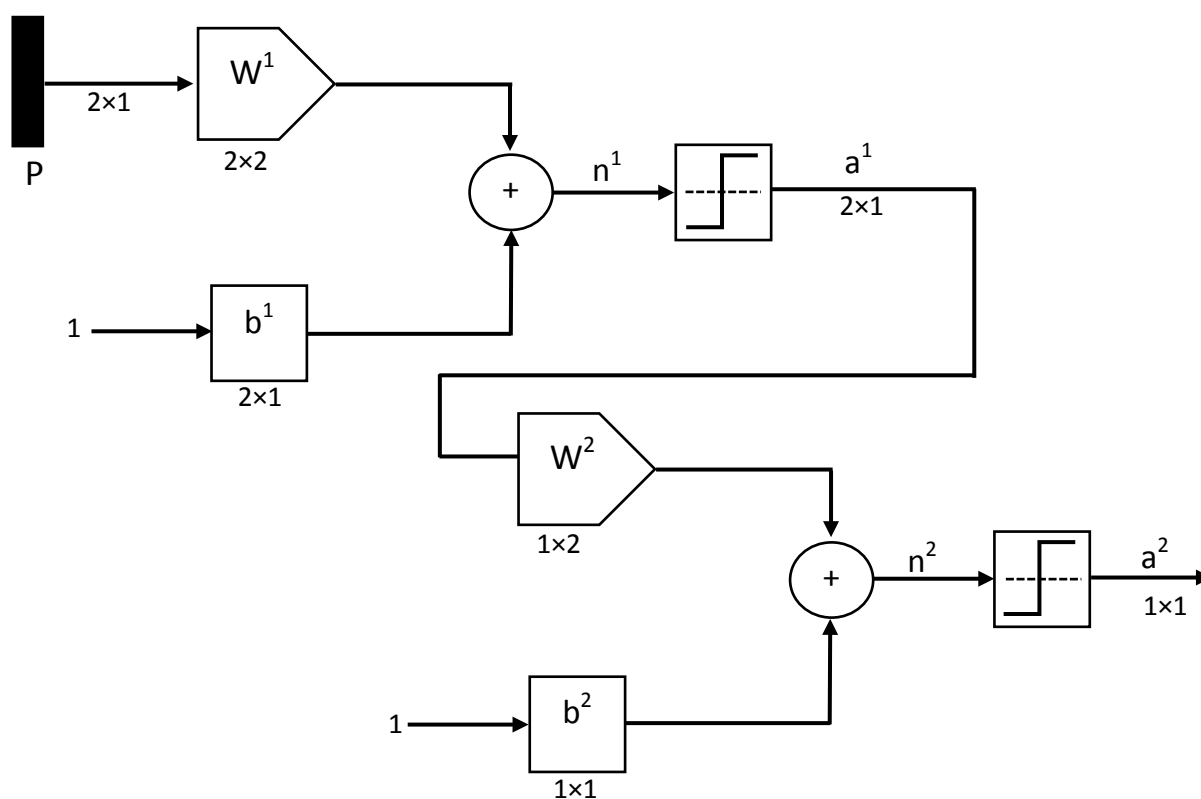
$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t_1 = 1$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t_2 = -1$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad t_3 = 1$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad t_4 = -1$$

دیاگرام شبکه به صورت زیر می باشد:



همانطور که از شکل مشخص است به دو نرون در لایه اول و یک نرون در لایه دوم نیازمندیم.

حل مسئله XOR با قانون MR1:

ابتدا مقادیر وزن ها و بایاس را به طور تصادفی انتخاب می کنیم. فرض می کنیم مقادیر اولیه به صورت زیر می باشد:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$b^1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$w^2 = [1 \quad 1]$$

$$b^2 = 0.5$$

حال یک الگو را به طور تصادفی به شبکه اعمال می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_1 وارد شده است. خروجی نرون ها و شبکه به صورت زیر می باشد:

$$n^1 = w^1 P_1 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0.5) = 2.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(2.5) = 1$$

چون خروجی برابر هدف شد نیازی به تغییر نیست. حال الگوی دیگری را به صورت تصادفی به شبکه اعمال می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_4 وارد شده است. خروجی نرون ها و شبکه به صورت زیر می باشد:

$$n^1 = w^1 P_4 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0.5) = 0.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.5) = 1$$

پاسخ شبکه با پاسخ مطلوب متفاوت است پس می بایستی پارامترهای شبکه تغییر کند. بدین منظور یکی از نرون ها در لایه اول که مقدار خروجی آن به صفر نزدیکتر است را انتخاب و پارامترهای آن را تغییر می دهیم. در اینجا خروجی نرون اول در لایه اول برابر صفر است. پس نرون اول از لایه اول را انتخاب می کنیم و به وسیله فرمول زیر پارامترهایش را تغییر می دهیم. نرخ یادگیری را 0.5 در نظر می گیریم.

$$w_i^1(k+1) = w_i^1(k) + a \left(t(k) - w_i^1(k) p(k) \right) p^T(k)$$

پس برای نرون اول خواهیم داشت:

$$w_1^1(2) = w_1^1(1) + a(t(1) - w_1^1(1)p(1))p^T(1)$$

$$w_1^1(2) = [0.1 \quad 0.2] + 0.5 \left((-1) - [0.1 \quad 0.2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) [1 \quad -1]$$

$$w_1^1(2) = [-0.35 \quad 0.65]$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} -0.35 & 0.65 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

حال دوباره الگوی P_4 را اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_4 + b^1 = \begin{bmatrix} -0.35 & 0.65 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.5 = -1.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-1.5) = -1$$

خروجی شبکه برابر با خروجی مطلوب شد. حال الگوی دیگری را تصادفاً به شبکه اعمال می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_3 وارد شده است.

$$n^1 = w^1 P_3 + b^1 = \begin{bmatrix} -0.35 & 0.65 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.5 = -1.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-1.5) = -1$$

پاسخ شبکه با پاسخ مطلوب متفاوت است پس می بایستی پارامترهای شبکه تغییر کند. بدین منظور یکی از نرون ها در لایه اول که مقدار خروجی آن به صفر نزدیکتر است را انتخاب و پارامترهای آن را تغییر می دهیم. در اینجا خروجی نرون اول در لایه اول برابر صفر است. پس نرون اول از لایه اول را انتخاب می کنیم.

پس برای نرون اول خواهیم داشت:

$$w_1^1(3) = w_1^1(2) + a(t(2) - w_1^1(2)p(2))p^T(2)$$

$$w_1^1(3) = [-0.35 \quad 0.65] + 0.5 \left(1 - [-0.35 \quad 0.65] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) [-1 \quad -1]$$

$$w_1^1(3) = [-1 \quad 0]$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

حال دوباره الگوی P_3 را اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_3 + b^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.5 = 0.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.5) = 1$$

خروجی شبکه برابر با خروجی مطلوب شد. حال الگوی دیگری را تصادفاً به شبکه اعمال می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_2 وارد شده است.

$$n^1 = w^1 P_2 + b^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 = 2.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(2.5) = 1$$

پاسخ شبکه با پاسخ مطلوب متفاوت است پس می بایستی پارامترهای شبکه تغییر کند. بدین منظور یکی از نرون ها در لایه اول که مقدار خروجی آن به صفر نزدیکتر است را انتخاب و پارامترهای آن را تغییر می دهیم. در اینجا خروجی نرون دوم در لایه اول برابر صفر است. پس نرون دوم از لایه اول را انتخاب می کنیم.

پس برای نرون دوم خواهیم داشت:

$$w_2^1(4) = w_2^1(3) + a(t(3) - w_2^1(3)p(3))p^T(3)$$

$$w_2^1(4) = [0.2 \quad 0.5] + 0.5 \left((-1) - [0.2 \quad 0.5] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) [-1 \quad 1]$$

$$w_2^1(4) = [0.85 \quad -0.15]$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.85 & -0.15 \end{bmatrix}$$

حال دوباره الگوی P_2 را اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_3 + b^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.85 & -0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.9 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign} \left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.5 = 0.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.5) = 1$$

در اینجا بایستی مقادیر پارامترهای نرون اول از لایه دوم نیز تغییر کند. پس:

$$w_1^1(4) = w_1^1(3) + a(t(3) - w_1^1(3)p(3))p^T(3)$$

$$w_1^1(4) = [-1 \quad 0] + 0.5 \left((-1) - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) [-1 \quad 1]$$

$$w_1^1(4) = [0 \quad -1]$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.85 & -0.15 \end{bmatrix}$$

حال دوباره الگوی P_2 را اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_3 + b^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.85 & -0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.9 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.5 = -1.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-1.5) = -1$$

خروجی شبکه برابر خروجی مطلوب می باشد. حال الگوی دیگری را به صورت تصادفی وارد می کنیم.

فرض می کنیم الگوی P_4 وارد شده است.

$$n^1 = w^1 P_4 + b^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.85 & -0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 = 2.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(2.5) = 1$$

پاسخ مطلوب با پاسخ خروجی متفاوت است پس پارامترها را تغییر می دهیم:

$$w_1^1(5) = w_1^1(4) + a(t(4) - w_1^1(4)p(4))p^T(4)$$

$$w_1^1(5) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} + 0.5 \left((-1) - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w_1^1(5) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2^1(5) = w_2^1(4) + a(t(4) - w_2^1(4)p(4))p^T(4)$$

$$w_2^1(5) = \begin{bmatrix} 0.85 & -0.15 \end{bmatrix} + 0.5 \left((-1) - \begin{bmatrix} 0.85 & -0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w_2^1(5) = [-0.15 \quad 0.85]$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

دوباره الگوی P_4 را اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_4 + b^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.15 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.9 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.5 = -1.5$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-1.5) = -1$$

حل مسئله XOR با قانون MR2:

ابتدا مقادیر وزن ها و بایاس را به طور تصادفی انتخاب می کنیم. فرض می کنیم مقادیر اولیه به صورت زیر می

باشد:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$b^1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$w^2 = [0.2 \quad 0.2]$$

$$b^2 = 0.2$$

حال یک الگو را به طور تصادفی به شبکه اعمال می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_1 وارد شده است. خروجی

نرون ها و شبکه به صورت زیر می باشد:

$$n^1 = w^1 P_1 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0.2) = 0.6$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.6) = 1$$

چون مقدار خروجی شبکه با مقدار هدف برابر شد نیازی به تغییر پارامترها نمی باشد. حال الگوی دیگری را به طور تصادفی انتخاب و به شبکه اعمال می کنیم. فرض کنید الگوی P_2 وارد شده است.

$$n^1 = w^1 P_2 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0.2) = 0.6$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.6) = 1$$

چون خروجی با مقدار مطلوب برابر نیست نیاز به تغییر پارامترها می باشد. نرون اول از لایه اول را در نظر می گیریم:

$$w_1^1(2) = w_1^1(1) + a(t(1) - w_1^1(1)p(1))p^T(1)$$

$$w_1^1(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} + 0.5 \left((-1) - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1^1(2) = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

حال دوباره P_2 را به شبکه اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_2 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [0.2 \quad 0.2] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0.2) = 0.2$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.2) = 1$$

خروجی شبکه با خروجی مطلوب برابر نیست. پس نرون دوم از لایه اول را برای تغییر پارامترهایش انتخاب می

کنیم:

$$w_2^1(3) = w_2^1(2) + a(t(2) - w_2^1(2)p(2))p^T(2)$$

$$w_2^1(3) = [0.1 \quad 0.1] + 0.5 \left((-1) - [0.1 \quad 0.1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) [-1 \quad 1]$$

$$w_2^1(3) = [0.6 \quad -0.4]$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix}$$

حال دوباره P_2 را به شبکه اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_2 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.9 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [0.2 \quad 0.2] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0.2) = -0.2$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-0.2) = -1$$

خروجی با خروجی مطلوب برابر شد. حال الگوی دیگری را تصادفی انتخاب و به شبکه اعمال می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_3 وارد شده است.

$$n^1 = w^1 P_3 + b^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0.2) = -0.2$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-0.2) = -1$$

خروجی شبکه با خروجی مطلوب متفاوت است پس پارامترها را تغییر می دهیم.

$$w_1^1(3) = w_1^1(2) + a(t(2) - w_1^1(2)p(2))p^T(2)$$

$$w_1^1(3) = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} + 0.5 \left((1) - \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w_1^1(3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix}$$

حال دوباره P_3 را به شبکه اعمال می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_3 + b^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0.2) = 0.2$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.2) = 1$$

خروجی با خروجی مطلوب برابر است. حال الگوی دیگری را وارد می کنیم. فرض می کنیم الگوی P_4 وارد شده است.

$$n^1 = w^1 P_4 + b^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0.2) = 0.6$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(0.6) = 1$$

الگوی خروجی با مقدار مطلوب برابر نیست. پس پارامترهای نرون دوم لایه اول را تنظیم می کنیم.

$$w_2^1(4) = w_2^1(3) + a(t(3) - w_2^1(3)p(3))p^T(3)$$

$$w_2^1(4) = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} + 0.5 \left((-1) - \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w_2^1(4) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$w_1^2(4) = w_1^2(3) + a(t(3) - w_1^2(3)p(3))p^T(3)$$

$$w_1^2(4) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} + 0.5 \left((-1) - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w_1^2(4) = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$w^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

جال دوباره P_4 را وارد می کنیم:

$$n^1 = w^1 P_4 + b^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.9 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \text{ssign}(n^1) = \text{ssign}\left(\begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 = w^2 a^1 + b^2 = [-0.3 \quad 0.7] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (0.2) = -0.8$$

$$a^2 = \text{ssign}(n^2) = \text{ssign}(-0.8) = -1$$